

Interazioni tra particelle elementari

Studio degli stati legati ex. e^+e^- , $q\bar{q}$
(meccanica quantistica non relativistica)

Decadimenti: ex $\pi \rightarrow \mu \nu$

Scattering: ex $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

In genere trattati relativisticamente

Le probabilità dei processi dipendono teoricamente da 2 ingredienti:

a) Ampiezza M (elemento di matrice): la DINAMICA;

b) Spazio delle fasi: la probabilità del processo è pesata dal numero di stati finali disponibili compatibili con la conservazione energia/impulso: la CINEMATICA

Ex. $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}$ ($\tau = 889 \text{ s}$) ($m_n = 939 \text{ MeV}$)

$\Lambda \rightarrow p \pi^-$ (B.R. = 64%)
 $\rightarrow n \pi^0$ (B.R. = 35.8%)
 $\rightarrow p e^- \bar{\nu}$ (B.R. = $8 \cdot 10^{-4}$)

} ($\tau = 2.6 \cdot 10^{-10} \text{ s}$) ($m_\Lambda = 1115 \text{ MeV}$)

Ma i decadimenti di n e Λ hanno circa lo stesso elemento di matrice (decadimento debole), ma lo spazio delle fasi va come $\Delta m^5 = (m_i - \sum m_f)^5$

L'ampiezza M si calcola con una teoria di campo relativistica attraverso, ad es. La tecnica dei diagrammi di Feynman;

Lo spazio delle fasi rappresenta gli stati finali accessibili parametrizzati in modo invariante di Lorentz.

La sezione d'urto è una probabilità di transizione normalizzata a un flusso di particelle parametrizzato in modo invariante di Lorentz.

Regola d'oro di Fermi (Griffiths, Seiden)

-**Decadimenti** : $1 \rightarrow 2+3+4+\dots+n$, $d\Gamma$: probabilità differenziale di decadimento, al secondo
Andiamo nel sistema a riposo della particella:

$$d\Gamma = |M|^2 \frac{S}{2m_1} \left[\left(\frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left(\frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \dots \left(\frac{d^3 \vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n)$$

Con m_1 la massa della particella che decade a riposo

S è un fattore statistico = prodotto $1/j!$ per ciascun gruppo di j particelle identiche nello stato finale.

Per avere la probabilità totale Γ bisogna integrare sullo spazio delle fasi: $d^3 \vec{p}_2, d^3 \vec{p}_3, \dots, d^3 \vec{p}_n$

Ex. $1 \rightarrow 2 + 3 : \Gamma = \frac{S}{m_1 (4\pi)^2} \frac{1}{2} \int \frac{|M|^2}{E_2 E_3} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) d^3 \vec{p}_2 d^3 \vec{p}_3$

In generale M dipende dagli impulsi e non può essere in tenuta fuori dall'integrale. Tuttavia nel caso $1 \rightarrow 2 + 3$, l'integrale può essere fatto senza conoscere M esplicitamente

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi} \frac{|\vec{p}|}{m_1^2} |M|^2, \text{ da notare la dipendenza da } \frac{|\vec{p}|}{m_1^2} \text{ (l'effetto dello spazio delle fasi).}$$

Dove $|\vec{p}|$ è il modulo dell'impulso comune delle due particelle dello stato finale nel loro centro di massa e M deve essere calcolata per questo impulso.

Scattering: $1+2 \rightarrow 3 + 4 + \dots n$

$$d\sigma = |M|^2 \underbrace{\frac{S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2) - (m_1 m_2)^2}}}_{\text{Termine di flusso}} \left[\left(\frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{d^3 \vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) \dots \left(\frac{d^3 \vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \cdot \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \dots p_n)$$

N.B. M ha dimensioni $(m)^{4-n}$ con n numero totale (entranti più uscenti) di particelle

Se siamo interessati solo all'angolo θ di produzione della particella 3 dobbiamo:

integrare su $|\vec{p}_3|, |\vec{p}_4|, \dots, |\vec{p}_n|$, per ottenere $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

Ex. $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, nel c.m. (Griffith, Seiden):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi} \frac{S|M|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}$$

Con $|\vec{p}_i|, (|\vec{p}_f|)$ il modulo comune delle particelle 1,2 (3,4). Come nel caso del decadimento $1 \rightarrow 2 + 3$ l'integrale sugli impulsi si può fare senza conoscere esplicitamente la dipendenza dello scalare $|M|^2$ dagli impulsi.

Elettrodinamica

Interazione tra particelle cariche di spin $1/2$.

Ingredienti

a) **I fermioni e gli antifermioni:** $(e^+e^-), (\mu^+\mu^-), (\tau^+\tau^-), (q\bar{q}), \dots$

Le funzioni d'onda che descrivono fermioni e antifermioni liberi sono:

$$\psi(x) = a \cdot e^{-ip \cdot x} u^{(s)}(p); \quad \bar{\psi}(x) = a \cdot e^{-ip \cdot x} v^{(s)}(p), \quad s = 1, 2$$

Gli spinori u e v (4 dimensioni) descrivono lo stato di spin e sono autostati di S_z se z è la direzione di moto delle particelle. u e v soddisfano le equazioni di Dirac.

u e v rappresentano rispettivamente gli elettroni e i positroni (antiparticelle) (Griffith):

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0; \quad (\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0; \quad \text{Le } \gamma^\mu \text{ sono 4 matrici } 4 \times 4 \text{ ad es.}$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Per definire anche un prodotto scalare invariante di Lorentz si definiscono anche gli spinori aggiunti: $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0 = [u_1^*, u_2^*, -u_3^*, -u_4^*]$, con $\bar{u}u$ invariante di Lorentz

Gli spinori aggiunti soddisfano le equazioni di Dirac:

$$\bar{u}(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0; \quad \bar{v}(\gamma^\mu p_\mu + m) = 0$$

b) Il fotone:

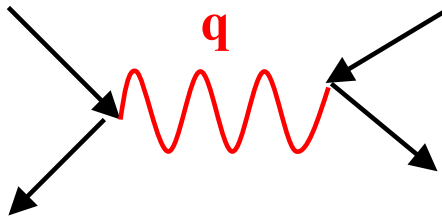
$$A^\mu(x) = a \cdot e^{-ip \cdot x} \epsilon_{s(s=1,2)}^\mu$$

inv. di gauge: $A^\mu = A^\mu + \partial^\mu \lambda$ e gauge di Lorentz: $\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$

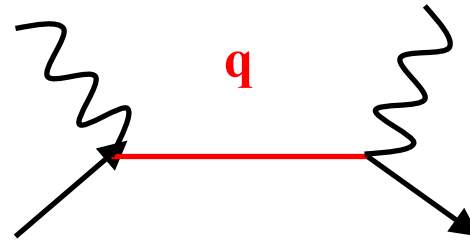
Gauge di Coulomb $A^0=0 \Rightarrow \epsilon^0 = 0, \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0$ (gauge trasversa: $\epsilon_1 = (1,0,0), \epsilon_2 = (0,1,0)$)

c) I propagatori:

$g_{\mu\nu} / q^2$ il fotone;



$\frac{(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 + m^2}$ il fermione



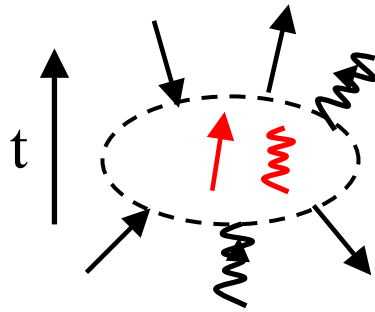
d) **La matrice di interazione M**

Si costruisce con le parametrizzazioni dei fermioni, fotoni e propagatori secondo le prescrizioni dei diagrammi di Feynman.

Il risultato è una funzione scalare di Lorentz funzione degli impulsi, delle masse e degli spin delle particelle coinvolte. Se gli spin non sono osservati M è solo funzione degli impulsi e delle masse.

Regole di Feynman per costruire l'ampiezza $-iM$:




Grafico dell'interazione




Particelle uscenti

Linee interne

Particelle entranti

1) Per ogni fermione , antifermione , fotone  entranti viene associato un fattore rispettivamente: $\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\varepsilon}_\mu$

2) Per ogni fermione , antifermione , fotone  uscenti viene associato un fattore rispettivamente: $\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}_\mu^*$

3) Il fattore $i\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$ per ciascun vertice nel diagramma : 

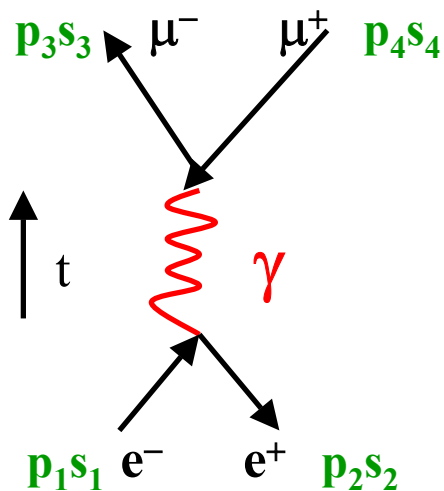
4) Inserire i propagatori per elettroni e fotoni (linee interne con 4-impulso q_μ)

$$\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}, \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \text{ con il suo fattore } \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$$

5) Ciascun vertice conserva l'impulso $(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3) \Rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$ con la conservazione complessiva del 4-impulso (k e p con il loro segno)

6) Antisimmetrizzazione: segno $-$ tra i diagrammi che differiscono solo per lo scambio di due fermioni identici entranti o uscenti

Esempio: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (governato dalla QED fino a $\sqrt{s} \sim 30$ GeV).



$$\begin{aligned}
 -iM = & \int \left[\overline{u}(p_3, s_3) i e \gamma^\mu v(p_4, s_4) \right] \overbrace{\frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2}}^{\text{propagatore}} \cdot \underbrace{\left[u(p_1, s_1) i e \gamma^\nu \overline{v}(p_2, s_2) \right]}_{\text{Corrente uscente}} \cdot \underbrace{\left[u(p_1, s_1) i e \gamma^\nu \overline{v}(p_2, s_2) \right]}_{\text{Corrente entrante}} \\
 & \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q) (2\pi)^4 \delta^4(q - p_3 - p_4)}_{\text{Conservazione 4-impulso}} \cdot \underbrace{\frac{d^4 q}{(2\pi)^4}}_{\text{Integrale sull'impulso dello stato intermedio}}
 \end{aligned}$$

M si calcola per stati iniziali e finali di spin definiti: s_1, s_2, s_3, s_4 . Se gli stati iniziali non sono polarizzati e se non si misura lo spin delle particelle finali: bisogna:

-Mediare sugli spin iniziali
 -Sommare su quelli finali

$\} \Rightarrow$ Calcolo di tracce di prodotti di matrici γ (tecnica di Casimir)

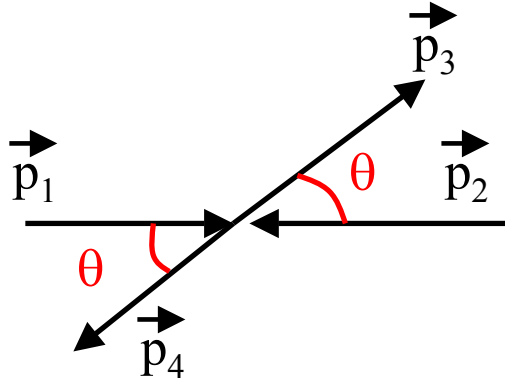
Il modulo quadro dell'ampiezza di puo' scrivere come il prodotto di 2 tensori:

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{\alpha\beta}^e L_{\alpha\beta}^\mu, \quad L_{\alpha\beta}^e = \text{Tr} \left[v(p_2) \overline{v}(p_2) \gamma_\alpha u(p_1) \overline{u}(p_1) \gamma_\beta \right] e \text{ analogamente per il } \mu$$

Il risultato deve essere una funzione scalare di Lorentz costruita con i 4 quadrimpulsi

$$|M|^2 = \frac{4e^4}{(p_1 + p_2)^4} \{2(p_3 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_2) + 2(p_3 \cdot p_2)(p_4 \cdot p_1) + 2m_e^2(p_3 \cdot p_4) + 2M_\mu^2(p_1 \cdot p_2) + 4M_\mu^2 m_e^2\}$$

Trascuriamo i termini in m_e^2 : $|M|^2 = \frac{4e^4}{(p_1 + p_2)^4} \{2(p_3 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_2) + 2(p_3 \cdot p_2)(p_4 \cdot p_1) + 2M_\mu^2(p_1 \cdot p_2)\}$



Andiamo nel c.m. : $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p_1, |\vec{p}_3| = |\vec{p}_4| = p_3$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \varepsilon$$

$$p_2 \cdot p_4 = p_3 \cdot p_1 = \varepsilon^2 - p_3 p_1 \cos \theta$$

$$p_1 \cdot p_4 = p_3 \cdot p_2 = \varepsilon^2 + p_3 p_1 \cos \theta$$

$$p_1 \cdot p_2 = \varepsilon^2 - p_1^2$$

$$|M|^2 = \frac{8e^4}{(2\varepsilon)^4} \{2\varepsilon^4 + 2p_3^2 p_1^2 \cos^2 \theta + M_\mu^2(\varepsilon^2 + p_1^2)\}, \quad \text{con } p_3^2 = (\varepsilon^2 - M_\mu^2)$$

N.B. Il termine in $\cos\theta$ si cancella

$$\varepsilon^2 \gg m^2 \Rightarrow \varepsilon^2 = p_1^2 \Rightarrow |M|^2 = \frac{8e^4}{(2\varepsilon)^4} \{2(1 + \cos^2 \theta) + \frac{2M_\mu^2}{\varepsilon^2}(1 - \cos^2 \theta)\}$$

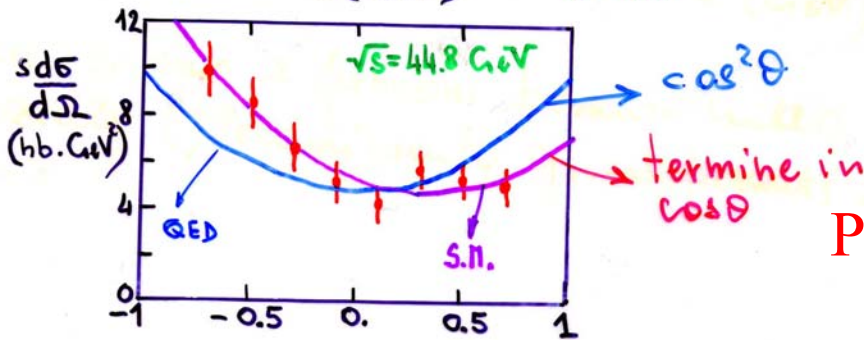
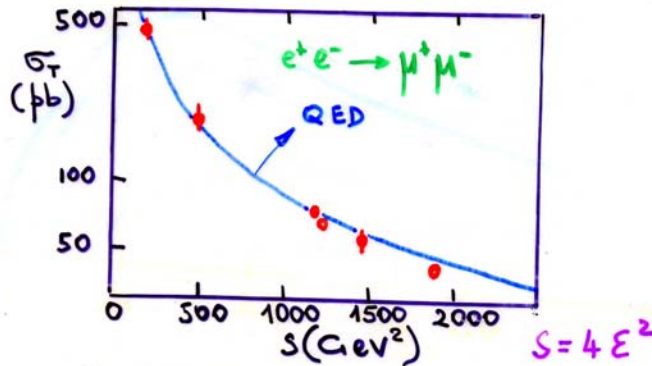
Regola d'oro nel c.m.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{(2\varepsilon)^2} \left(\frac{p_3}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{8e^4}{(2\varepsilon)^4} \{2(1 + \cos^2 \theta) + 2\left(1 - \frac{p_3^2}{\varepsilon^2}\right) \sin^2 \theta\} \quad e^4 = (4\pi)^2 \alpha^2, \beta_\mu = p_3/\varepsilon$$

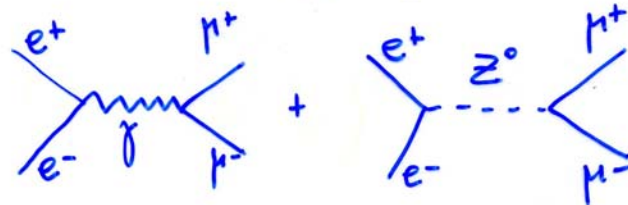
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4(2\varepsilon)^2} \beta_\mu \left\{ (1 + \cos^2 \theta) + (1 - \beta_\mu^2) \sin^2 \theta \right\} \xrightarrow{\beta_\mu \rightarrow 1} \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4(2\varepsilon)^2} (1 + \cos^2 \theta)}$$

Integrando in θ abbiamo la sezione d'urto totale: $(s = (p_1 + p_2)^2 = (2\varepsilon)^2)$

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{3\varepsilon^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} = \left[\frac{1}{137}\right]^2 \cdot \frac{0.388 \text{ mb}}{\varepsilon^2 (\text{GeV}^2)} \approx \frac{22 \text{ nb}}{\varepsilon^2 (\text{GeV}^2)}$$



S.M. :



Risultati sperimentali:

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$$

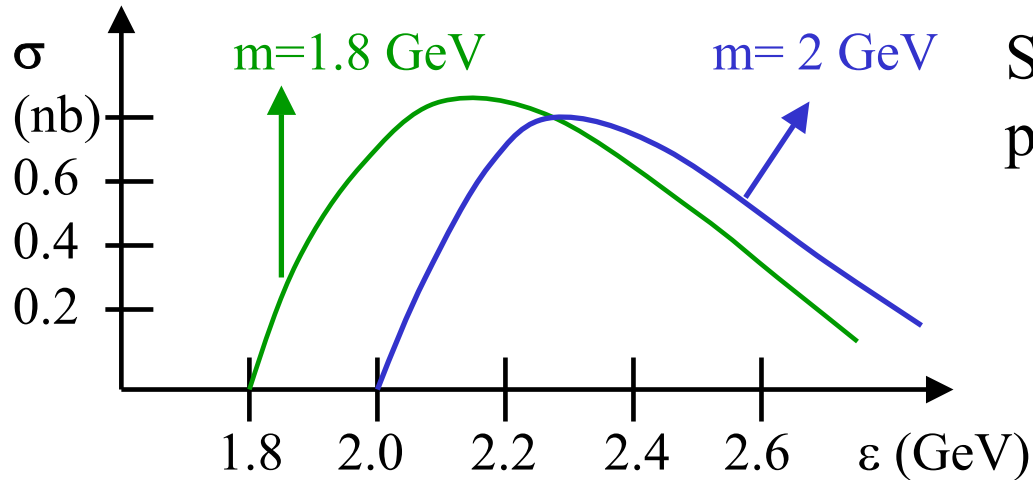
La QED è valida fino
 $\sqrt{s} \sim 30 \text{ GeV}$.

Per valori dell'energia più grandi occorre tener conto anche dei contributi deboli.

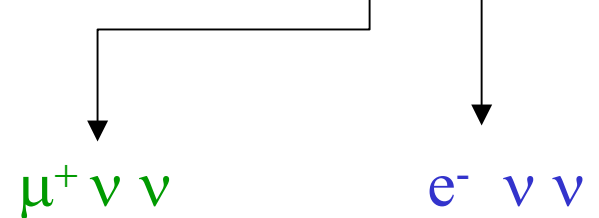
Se la massa del fermione finale non è trascurabile come, ad es. nel caso del τ che ha una massa di circa 1.8 GeV, la sezione d'urto vale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4(2\varepsilon)^2} \beta_f \{2 - \beta_f^2 \sin^2 \theta\} \quad e \quad \sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{4(2\varepsilon)^2} \beta_f \left(1 - \frac{\beta_f^2}{3}\right), \quad \beta_f = \sqrt{1 - \frac{m_\tau^2}{\varepsilon^2}}$$

Scoperta del leptone τ



Si studia in funzione di ε il processo $e^+ e^- \rightarrow \tau^+ \tau^-$



Se invece ci sono due fermioni pesanti nello stato iniziale ex $c\bar{c} \rightarrow e^+e^-$

$$M_f^2 / 4\varepsilon^2 \ll 1; \quad m_i^2 / \varepsilon^2 \approx 1 \Rightarrow \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \approx \frac{\varepsilon}{\beta_i} = \frac{1}{\beta_i}; \quad \beta_f = 1$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4(4\varepsilon)^2} \frac{1}{\beta_i} \{2 - \beta_i^2 \sin^2 \theta\} \quad e \quad \sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{(2\varepsilon)^2} \frac{1}{\beta_i} \left(1 - \frac{\beta_i^2}{3}\right)$$

$$\text{cfr } \frac{\Gamma(Y \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma(\psi \rightarrow e^+e^-)} = 0.24$$

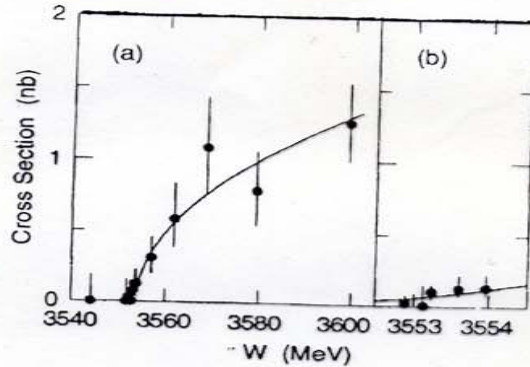
$$(\beta_i = \frac{p_i}{\varepsilon} \approx \frac{p_i}{m_i})$$

BES : scan in energia $e^+e^- (W)$
 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^- (\tau^+ \rightarrow e^+\nu\nu, \tau^- \rightarrow \mu^-\nu\nu)$

numero di eventi attesi a ciascun W :

$$\mu = (\epsilon \cdot \sigma(W, m_\tau) + \sigma_B) \cdot L(W)$$

$$\sigma_W \approx 1.4 \text{ MÅT}$$



$$\Rightarrow m_\tau = 1776.96 \pm 0.2 \pm 0.2 \text{ MeV}$$

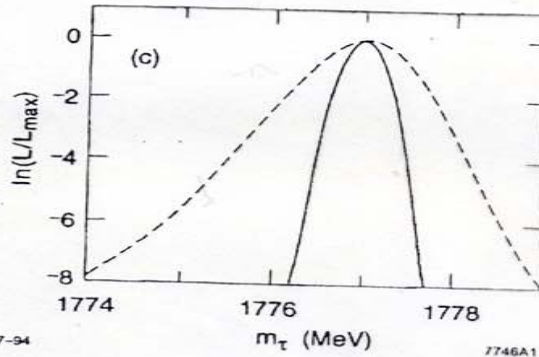
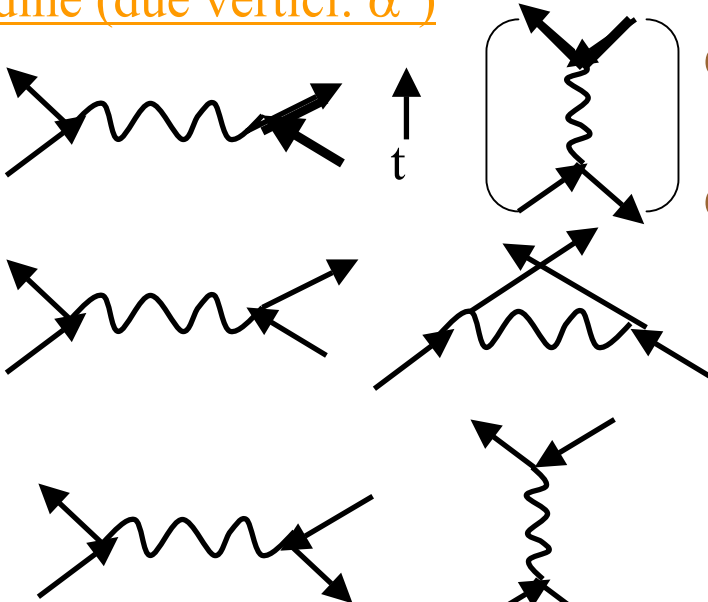


Figure 1: (a) The center-of-mass energy dependence of the $\tau^+\tau^-$ cross section resulting from the likelihood fit (curve), compared to the data (Poisson errors). It should be emphasized that the curve does not result from a direct fit to these data points. (b) An expanded version of (a), in the immediate vicinity of $\tau^+\tau^-$ threshold. (c) The solid curve shows the dependence of the logarithm of the likelihood function on m_τ , with the efficiency and background parameters fixed at their most likely values; the dashed curve shows the likelihood function from Ref. 2.

Principali processi di QED

Il ordine (due vertici: α^2)

E
L
A
S
T
I
C
I



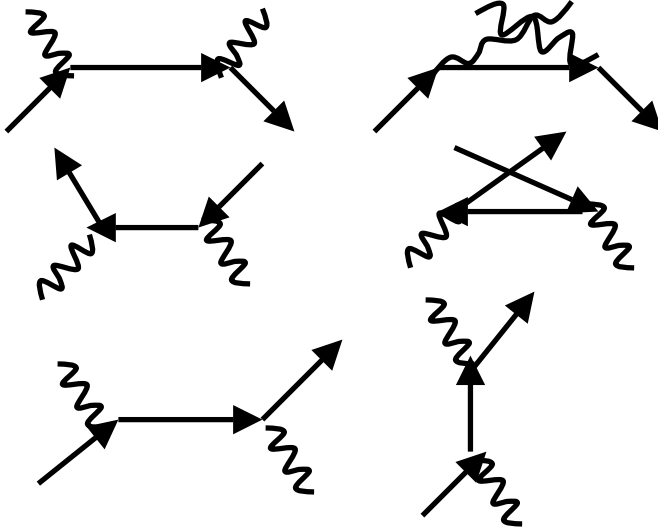
$e + \mu \rightarrow e + \mu$ (scattering Mott se $M \gg m$)
(Rutherford se $v \ll c$)

$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ (Moller scattering)

$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$ (Bhabha scattering)

I
N
E
L
A
S
T
I
C
I



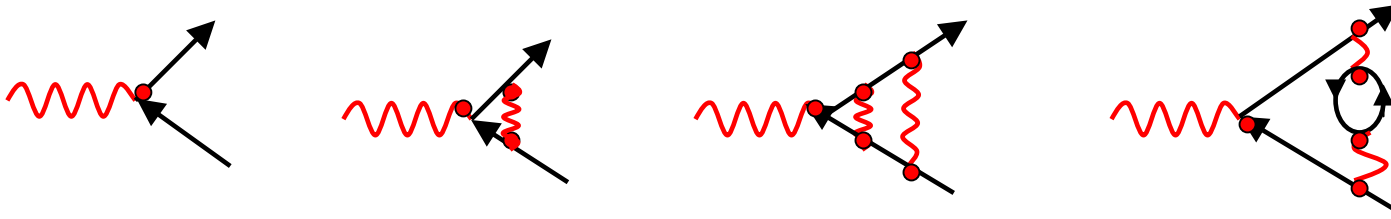
$e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$

$\gamma \gamma \rightarrow e^+ e^-$

$e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ (Compton scattering)

Ordini superiori

Ai diagrammi ordine α^2 si aggiungono anche altri diagrammi di ordine superiore in α . Ad esempio il vertice tra due fermioni e fotone riceve contributi da:



I diagrammi di cui sopra rappresentano l'interazione di un elettrone con il campo elettromagnetico esterno. Il primo diagramma rappresenta l'interazione dominante (teoria di Dirac), gli altri costituiscono correzioni radiative di ordine crescente in α che prevedono sia scambi di fotoni virtuali che formazioni di coppie virtuali e^+e^- . Se l'elettrone si trova in campo magnetico esterno la sua interazione con il campo dipende dal momento magnetico μ . Definendo: $\mu = g \mu_B \mathbf{s}$ con $\mu_B =$ magnetone di Bohr.

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}, \text{ nella teoria di Dirac } g = 2 \text{ e}$$

$$\frac{(g-2)}{2} = 0.5 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) - 0.32848 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + \dots = (115965230 \pm 10) \cdot 10^{-11}$$

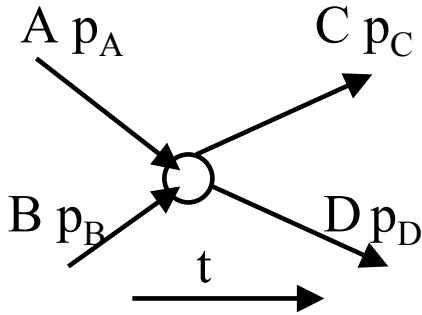
$$\text{le correzioni si esprimono come } \frac{(g-2)}{2}$$

Calcolo fino a ordine α^{10}

In accordo con la misura sperimentale entro una parte su 10^8 .

Simmetria di crossing

Consideriamo il processo $A + B \rightarrow C + D$



Il tempo scorre positivamente (\rightarrow) per tutte le particelle.

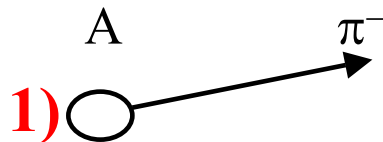
In generale:
$$E^2 - m^2 = |\vec{p}|^2 \Rightarrow (E - m) \cdot (E + m) = |\vec{p}|^2$$

Cioè dati p e m ci sono due valori dell'energia E che soddisfano la relazione relativistica:

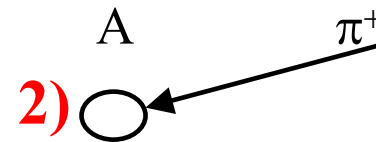
$$E = \pm \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}; \text{ energie negative!!}$$

Feynman: le particelle a energia negativa si propagano “negativamente” nel tempo (all'indietro) ed equivalgono a antiparticelle che si propagano positivamente nel tempo.

Ex. Sistema A che emette un pione negativo con l'energia del pione positiva:



È equivalente a:



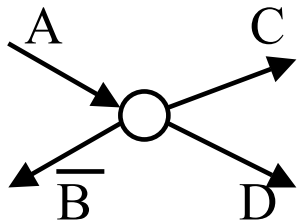
$$E_A \rightarrow E_A - E(\pi^-); Q_A \rightarrow Q_A - Q(\pi^-) = Q_A + Q(\pi^+)$$

Quindi il processo **1)** equivale a **2)** con il tempo che scorre negativamente con l'assorbimento dell'anti particella π^+ con energia negativa $-E$.

La carica Q si generalizza a tutti i numeri quantici e l'energia E al quadrimpulso p^μ .

Torniamo al processo 1) $A + B \rightarrow C + D$: la particella B:

$B(\xrightarrow{p_B})$ equivale a $\bar{B}(\xleftarrow{p_B})$ ($p_{\bar{B}} = -p_B$) Che esce con energia negativa:



$$\equiv A \rightarrow \bar{B} + C + D \quad 2)$$

così pure :

$$A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D \quad 3)$$

$$\bar{C} + \bar{D} \rightarrow \bar{A} + \bar{B} \quad 4)$$

L'ampiezza M che descrive il processo 1) è la stessa che descrive i processi 2),3),4) (simmetria di crossing) purchè:

in 2) $p_B \rightarrow -p_{\bar{B}}$;

Compatibilmente con lo spazio delle fasi (δ^4).

in 3) $p_C \rightarrow -p_{\bar{C}}$, $p_B \rightarrow -p_{\bar{B}}$;

in 4) $p_C \rightarrow -p_{\bar{C}}$, $p_B \rightarrow -p_{\bar{B}}$, $p_A \rightarrow -p_{\bar{A}}$, $p_D \rightarrow -p_{\bar{D}}$.

$$\text{Ex. } \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \gamma + e^- & \rightarrow & \gamma + e^- & \end{matrix} \quad (\text{Compton})$$

$$p_1 \ p_2 \quad p_3 \ p_4$$

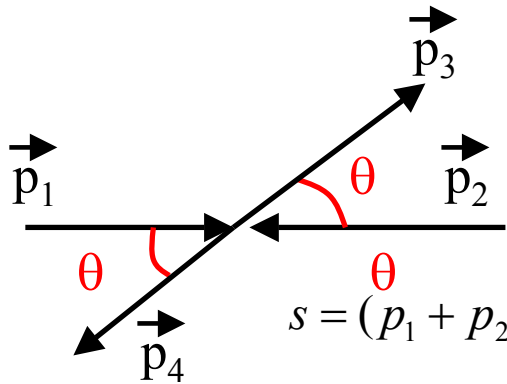
$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \quad (\text{Annichilazione})$$

$$p_2 \ -p_4 \quad p_3 \ -p_1$$

I principali processi di QED

Torniamo a $e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4(2\varepsilon)^2} (1 + \cos^2 \theta)$

Si può esprimere attraverso gli invarianti di Lorentz:

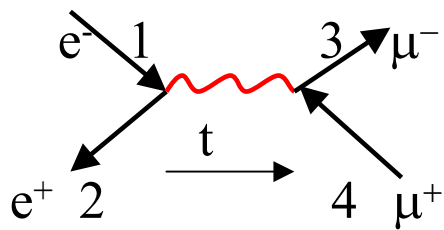


$$s = (p_1 + p_2)^2 \xrightarrow{c.m.} (2\varepsilon)^2;$$

$$t = (p_3 - p_1)^2 \xrightarrow{c.m.} -s \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}; \quad \text{con } s + t + u = \sum_i m_i^2 \approx 0 \text{ (trascurando le masse)}$$

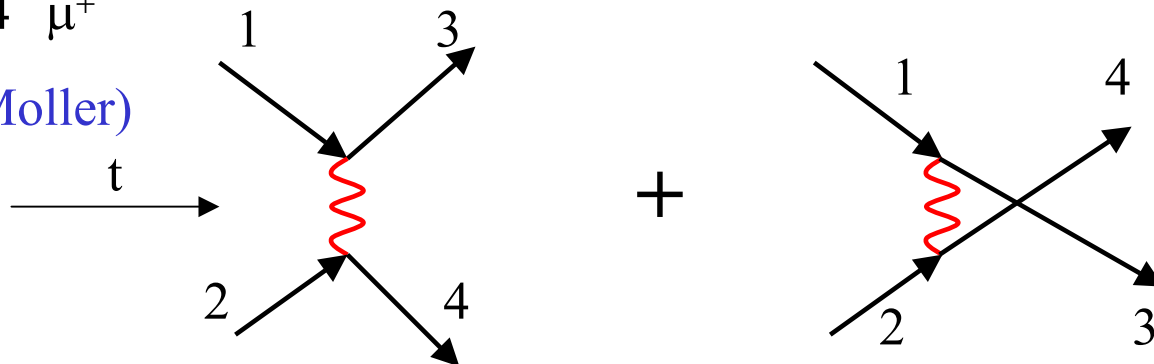
$$u = (p_4 - p_1)^2 \xrightarrow{c.m.} -s \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

a) $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{t^2 + u^2}{s^2} \right]$$

b) $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ (Moller)

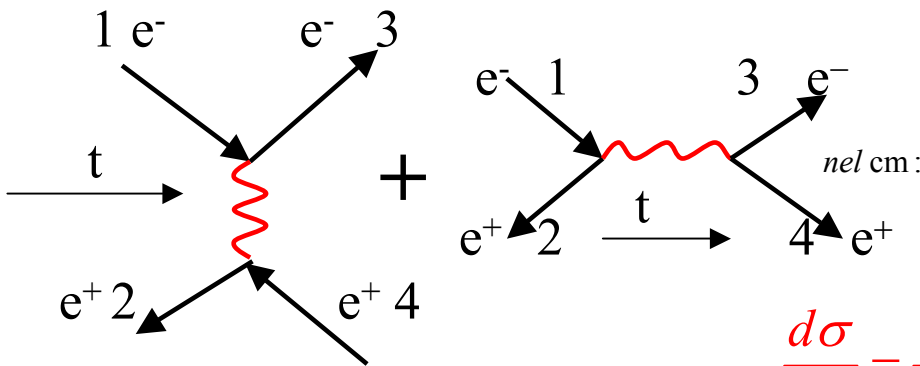


Rispetto alla a) $s \Leftrightarrow u$ ($2 \Leftrightarrow 4$), $t \Leftrightarrow s$ ($2 \Leftrightarrow 4$, $4 \Leftrightarrow 3$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{t^2 + s^2}{|A|^2} + \frac{2s^2}{2A \cdot B^*} + \frac{u^2 + s^2}{|B|^2} \right]$$

$$\text{nel cm} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2(2\varepsilon)^2} \left[\frac{1 + \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{2}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Diverge se } \theta \rightarrow 0 \text{ (} t \rightarrow 0 \text{)} \\ \theta \rightarrow \pi \text{ (} u \rightarrow 0 \text{)} \end{array}$$

b) $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ (Bhabha) Rispetto alla a) $t \Leftrightarrow s$ ($2 \Leftrightarrow 4$, $4 \Leftrightarrow 3$) per il primo diagramma

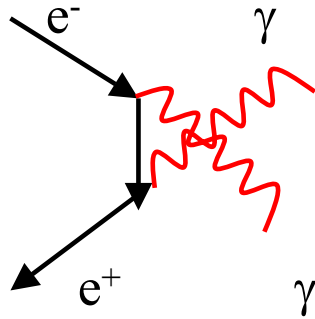
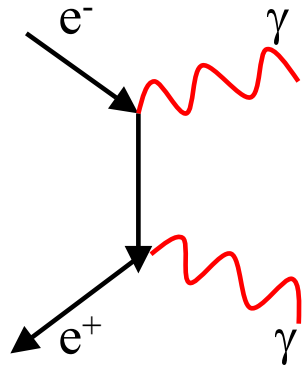


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{u^2 + s^2}{|A|^2} + \frac{2u^2}{2A \cdot B^*} + \frac{u^2 + t^2}{|B|^2} \right]$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4(2\varepsilon)^2} \left[\frac{3 + \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} \right]^2 \quad \text{Diverge se } \theta \rightarrow 0 \text{ (} t \rightarrow 0 \text{)}$$

Processi con 2 fotoni: $e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$, $e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$, $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma$

c) $e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$ (annichilazione in due fotoni)

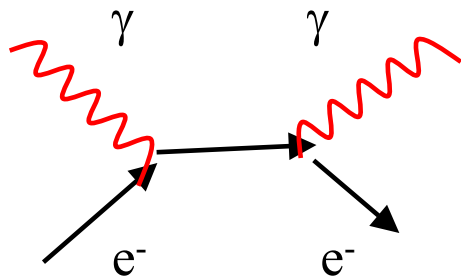
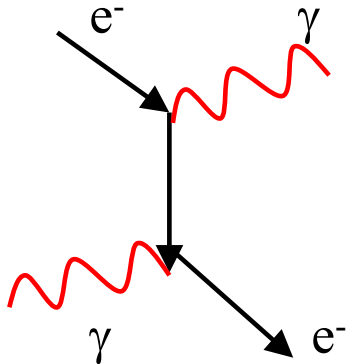


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right] \text{ Diverge se } \theta \rightarrow \pi \text{ (} u \rightarrow 0 \text{)}$$

$$\theta \rightarrow 0 \text{ (} t \rightarrow 0 \text{)}$$

Il termine incrociato delle due ampiezze e^+ è proporzionale a m_e^2 e svanisce nel limite relativistico

d) $e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$ (scattering Compton) ($t \rightarrow -s$)

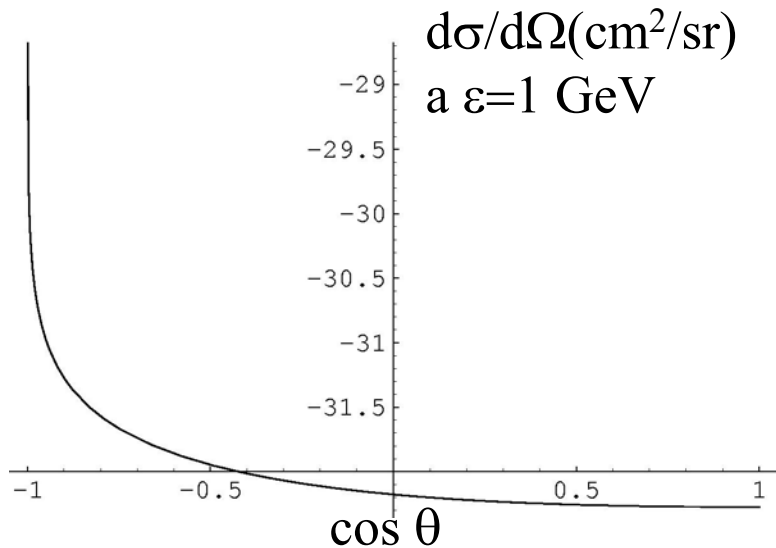


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{-s}{u} + \frac{-u}{s} \right]$$

Diverge se $\theta \rightarrow \pi$ ($u \rightarrow 0$)

N.B. le divergenze avvengono quando u o t vanno a 0 ma questo è vero solo per particelle senza massa, altrimenti il limite superiore per t e u è $-m_e^2$

Ad esempio nel caso dello scattering Compton (nel centro di massa con le due energie $\sim \varepsilon$) $u \sim -2\varepsilon^2(1+\cos\theta) - m^2$ (m^2 evita la divergenza a $\cos\theta = -1$)



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8\varepsilon^2} \left(\frac{1 + \cos\theta}{2} + \frac{2}{1 + \cos\theta + \frac{m^2}{2\varepsilon^2}} \right)$$

La sezione d'urto si puo' integrare sull'angolo solido:

$$\sigma_{Compton} = \frac{\pi\alpha^2}{\varepsilon^2} \ln\left(\frac{2\varepsilon}{m}\right)$$

Nonostante l'aumento con il logaritmo la sezione d'urto decresce asintoticamente con l'energia.

$\varepsilon = 1 \text{ GeV}$

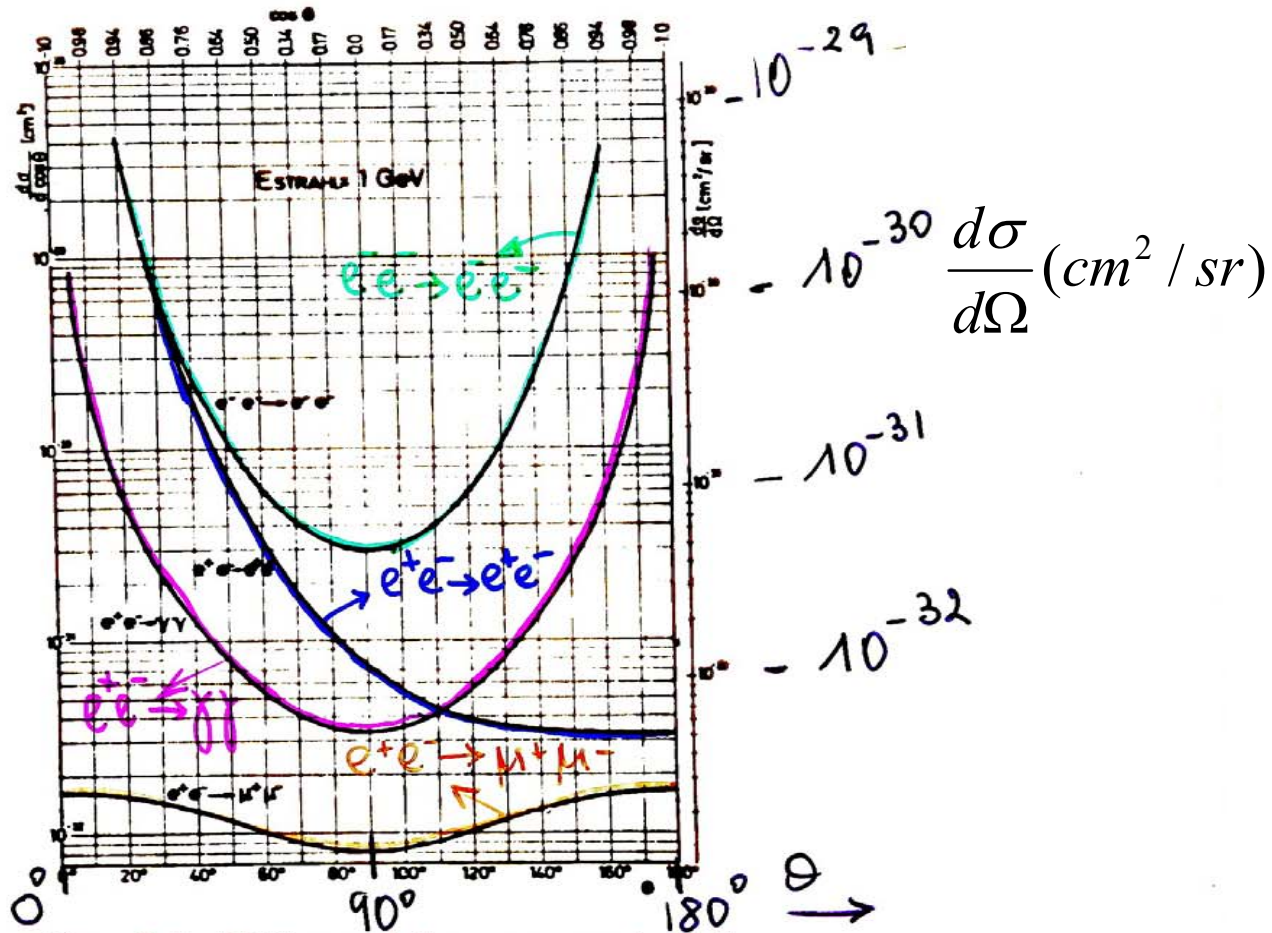


Fig. 3.1 Differential cross sections for $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ and $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ for a beam energy of 1 GeV.

Tutte le sezioni d'urto elettromagnetiche decrescono come:

$$\frac{1}{s} = \left(\frac{1}{E_{cm}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right)^2$$

Scattering di Mott

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \xrightarrow{t \leftrightarrow s} e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+ (e^- p \rightarrow e^- p)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{t^2 + u^2}{s^2} \right] \xrightarrow{t \leftrightarrow s} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} \right]$$

Trascurando la massa dell'elettrone:

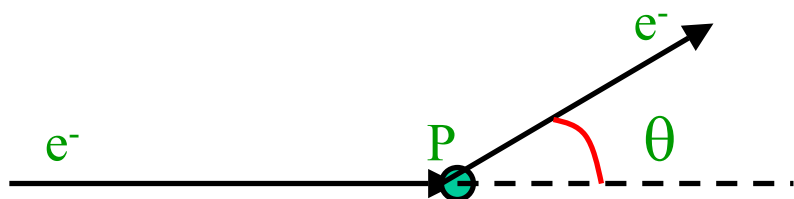
nel laboratorio:

$$p_1 = (E, \vec{p}_1); |\vec{p}_1| = E,$$

$$p_2 = (M, \vec{0}),$$

$$p_3 = (E', \vec{p}_3); |\vec{p}_3| = E'$$

$$p_4 = (E_4, \vec{p}_4)$$



$$t \equiv q^2 = (p_3 - p_1)^2 = (p_4 - p_2)^2 = p_3^2 + p_1^2 - 2p_3 p_1 = -2EE'(1 - \cos\theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$u = (p_4 - p_1)^2 = (p_3 - p_2)^2 = M^2 + m_e^2 - 2ME' = M^2 - 2ME'$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_e^2 + M^2 + 2ME = M^2 + 2ME$$


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\left[1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]} \left\{ \frac{|q|^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \left(\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \text{ solo } \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

N.B. dato:

$$-4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} = (M - E_4)^2 - |\vec{p}_4|^2 = 2M^2 - 2E_4M = 2M^2 - 2M(M + E - E') = -2ME + 2ME'$$

Cioè:
$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \xrightarrow{\frac{E}{M} \ll 1} 1 \quad (\text{il protone non rincula})$$

Osservazione: Il contributo a $\theta = \pi$ viene dal termine $\frac{|q|^2}{M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$ che contribuisce

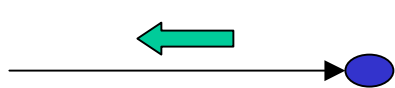
Solo se $\frac{|q|^2}{M^2} \neq 0$  **“spin flip”.**

Nell'interazione elettromagnetica l'elicità H delle particelle $H = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \pm 1$ viene conservata

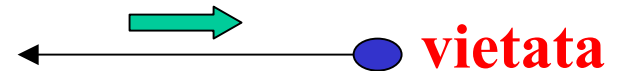
Se il protone “non ha spin”, la conservazione del momento angolare, permette solo l'interazione elettrica ($\cos^2 \theta/2$)

Dati: $\frac{|q|^2}{M^2} \ll 1$; $\frac{E}{M} \ll 1$; $\frac{|\vec{p}|}{m_e} \ll 1$ (caso non rel. e spin 0 di e) $\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4T^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$ (Rutherford)

Al crescere dell'energia (q^2):



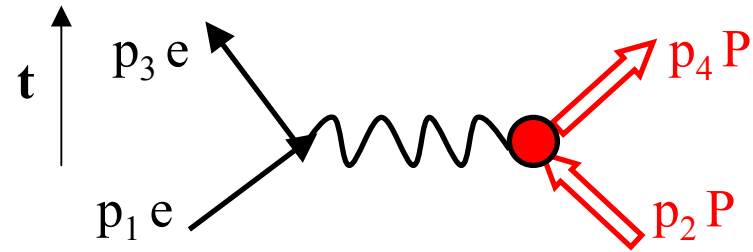
Interazione elettrica



Interazione magnetica



Scattering di Mott e struttura del protone



Il protone è una particella di Dirac come l'elettrone o il μ ?

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{\alpha\beta}^e \underbrace{L_{\alpha\beta}^p}_{\text{circled}}, L_{\alpha\beta}^e \text{ e' noto, } L_{\alpha\beta}^p \text{ no!}$$

La maniera più generale di parametrizzare il vertice (sconosciuto) del protone in modo Lorentz invariante e rispettando l'invarianza di gauge (Griffiths) è:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{\alpha}{2ME \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2 \frac{E'}{E} \left\{ 2k_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + k_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\}$$

Formula di Rosenbluth. Si riduce a quella di Mott (protone puntiforme) se $k_1 = -q^2$, $k_2 = 4M^2$ **Mott: L'elettrone non si avvicina abbastanza per "vedere" la struttura del protone**

k_1 e k_2 sono funzioni scalari dell'unico scalare (non banale) indipendente del processo e' q^2 che nel laboratorio si scrive: $q^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$ gli altri scalari o sono costanti, ex. $p_2^2 = M^2$ oppure sono riconducibile a q^2 , ex $q \cdot p_2 = -q^2/2$

N.B. E, E', θ non sono indipendenti se lo scattering è elastico: $e p \rightarrow e p$.

$$E' = \frac{E}{\left[1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}$$

Fissato E incidente e θ di scattering, E' è fissato

La “struttura” del protone è descritta dalle funzioni $k_1(q^2)$ e $k_2(q^2)$, k_1 descrive la struttura magnetica, k_2 quella elettrica.

Al posto di k_1, k_2 si possono usare \underline{G}_E e \underline{G}_M (fattori di forma elettrico e magnetico)

$$\frac{d\sigma/d\Omega}{d\sigma/d\Omega_{Mott}} = \left\{ \frac{G_E^2 + \frac{q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{q^2}{4M^2}} + \frac{q^2}{4M^2} 2G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad G_{E,p}(0)=1, G_{M,p}(0)=2.79 \quad (\text{Dirac}=1)$$

Interpretazione (Perkins) (non rel): Se $\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

$$G_E(q^2) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \equiv \text{trasformata di Fourier della distribuzione di carica } \rho(\vec{r})$$

Ex. Se $\rho(r) = \rho_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ (alla Yukawa) \Rightarrow

$$G_E(q^2) = \frac{1}{1 + \frac{q^2}{\alpha^2}}, \text{ avendo imposto } G_E(0) = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 4\pi\rho_0, \langle r^2 \rangle \equiv \frac{\int r^2 \rho(r) dr}{\int \rho(r) dr} = 6 / \alpha^2$$

N.B. Se il protone fosse puntiforme $G_E(q^2) = G_M(q^2) = 1$

Se il neutrone fosse puntiforme $G_E(q^2) = G_M(q^2) = 0$

Se una particella a spin 0 (π^+) fosse puntiforme $G_E(q^2) = 1; G_M(q^2) = 0$

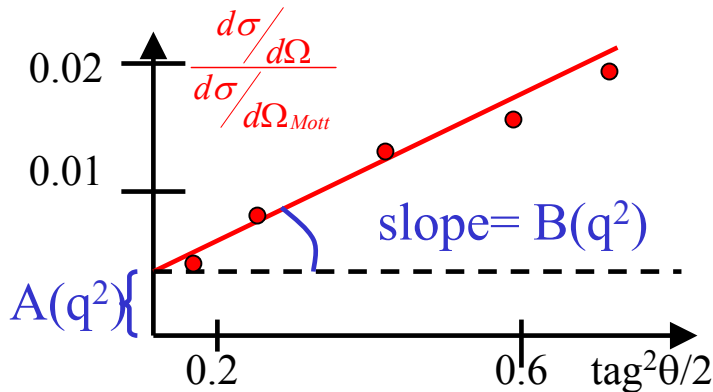
Torniamo alla relazione

$$\frac{d\sigma/d\Omega}{d\sigma/d\Omega_{Mott}} = \left\{ A(q^2) + B(q^2) \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2} \right\} (*)$$

Studio sperimentale: a varie energie incidenti E e per vari angoli di scattering θ , ma tali che:

$$|q|^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{4E^2}{\left[1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \text{costante}$$

La (*) ha una dipendenza lineare da $\tan^2 \theta/2$.



Da $A(q^2)$ e $B(q^2)$ si estraggono

$G_E(q^2)$ e $G_M(q^2)$

Risultati sperimentali:

$$G_E(q^2) = \frac{G_M(q^2)}{|\mu_p|} \equiv G(q^2) \text{ compatibile con } G_E(q^2) = \left[1 + \frac{q^2}{M_V^2} \right]^{-1}, \quad M_V \cong 0.9 \text{ GeV}$$

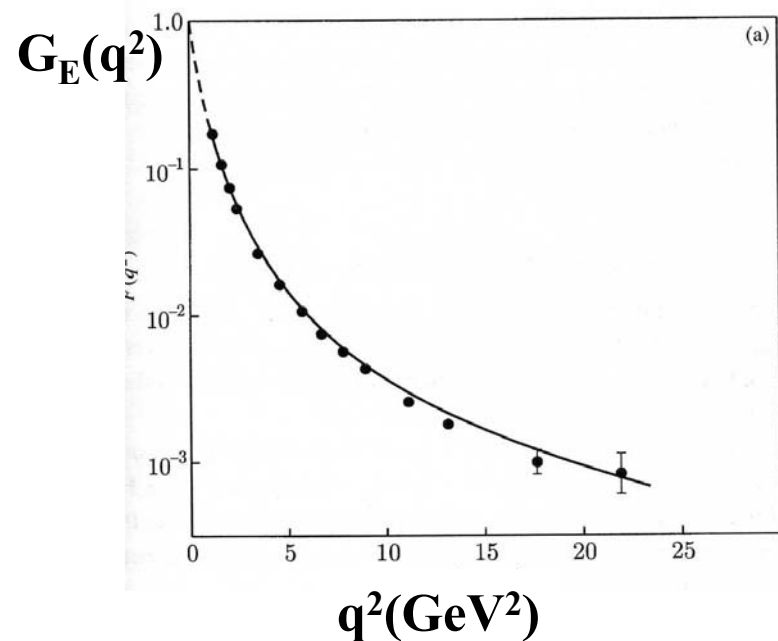
Formula di dipolo

A grande q^2 ($q^2 \gg M^2$) domina la parte con il fattore di forma magnetico (misure fino a circa 25 GeV^2). Se facciamo il Fourier inverso:

$$\rho(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int G_E(q^2) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d\vec{q} = \frac{1}{2\pi^2} \int G_E(q^2) e^{iqr \cos\theta} q^2 \sin\theta d\theta d\phi dq = \int G_E(q^2) \frac{\sin qr}{qr} q^2 dq = \frac{M_V^3}{8\pi} e^{-M_V r}$$

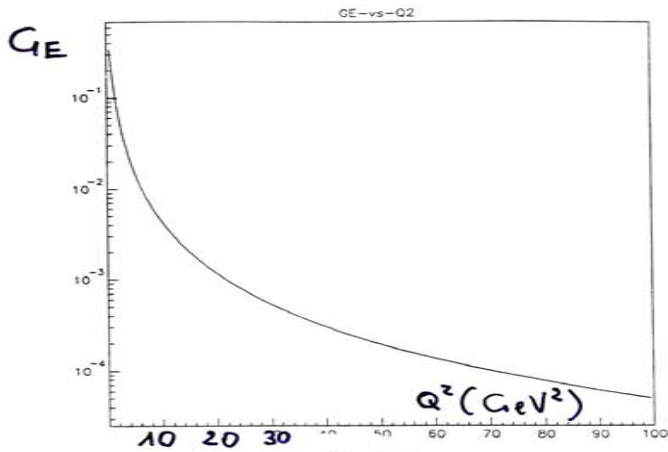
$$\rho(r) = \rho_0 e^{-M_V r}; \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \frac{\sqrt{12}}{M_V} \approx 0.8 \text{ fm}$$

Osserva che $\rho(r)$ è finito se $r \rightarrow 0$: non c'è nucleo duro come nel caso ad es. di $\exp(-Mr)/r$:
il protone è “gelatina” o “melograno”.



Il fattore di forma elastico decresce rapidamente e $\sigma \propto G_E^2$ (e G_M^2) \implies

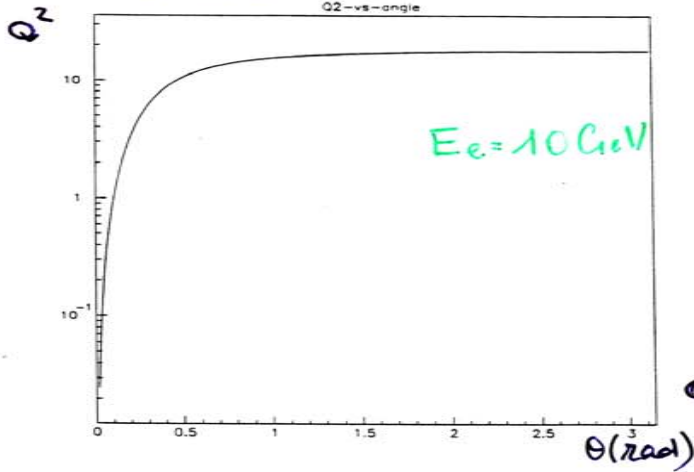
A grande q^2 il processo di scattering elastico diventa improbabile a favore di quello inelastico



$$G_E(Q^2) = \frac{1}{\left[1 + \frac{Q^2}{M_V^2}\right]^2}$$

$$M_V^2 = 0.71 \text{ GeV}^2$$

Max. Q² ottenuto a Here
 e[±]p (30+300 GeV) Q² ≈ 2000 GeV²
 GE decrease di 14 ordini di grandezza



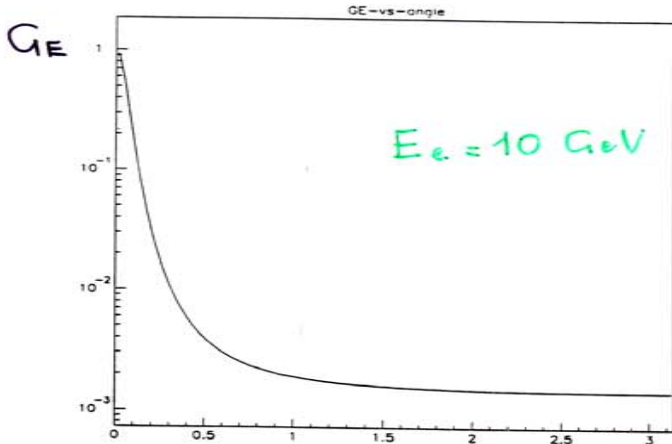
$$Q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

e p → e p

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M_p} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

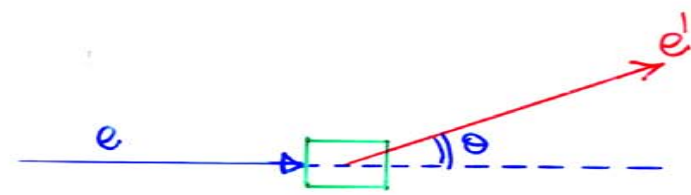
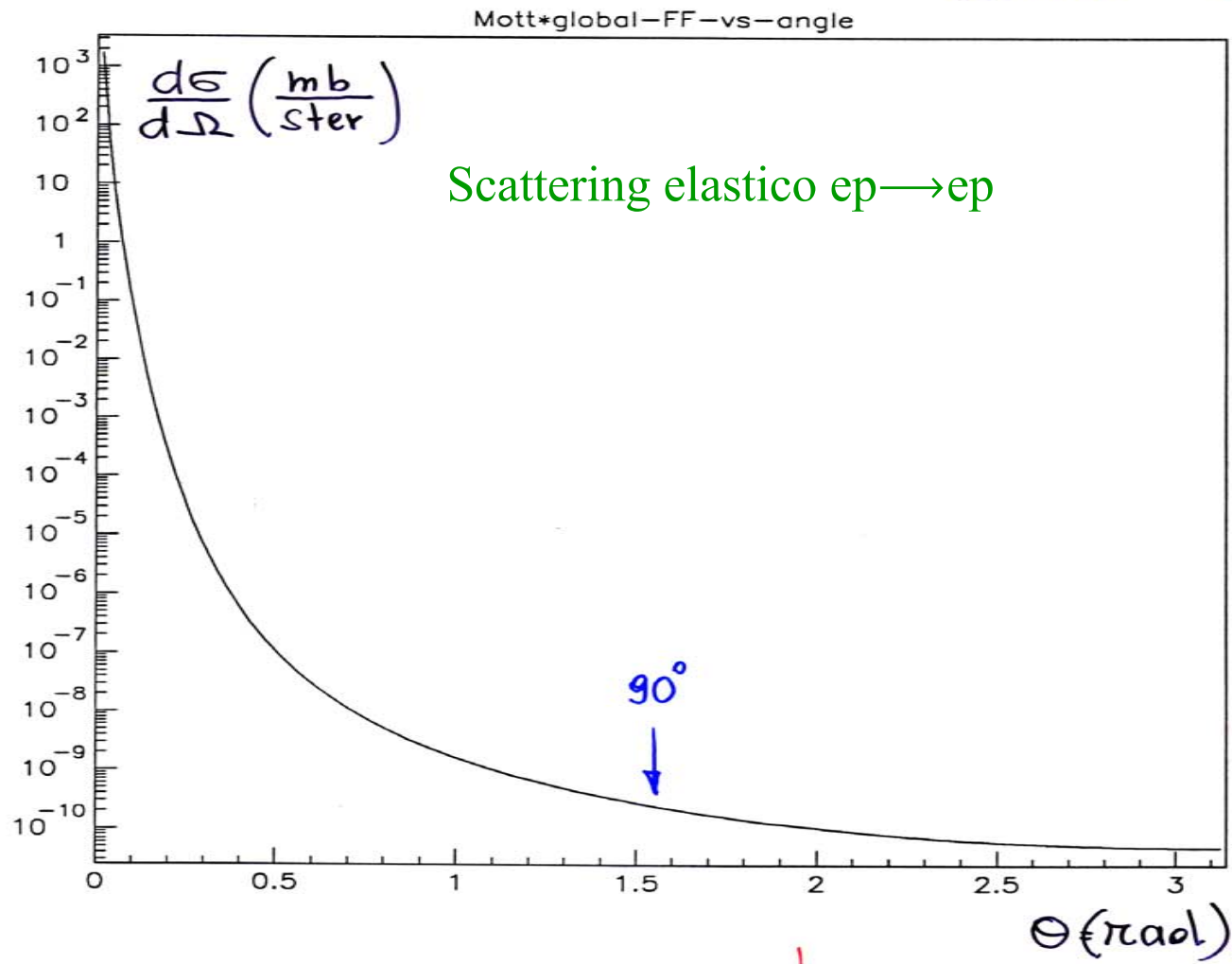
Q² max se θ = π :

$$Q_{\text{max}}^2 = \frac{4M_p E^2}{M_p + 2E} \xrightarrow{E \gg M_p} 2M_p E = \boxed{S}$$



θ = (rad)

$$E = 10 \text{ GeV}$$



Dimensionare fascio e bersaglio per avere a $\Theta = 45^\circ$
una misura all'1% di precisione.

Risonanze del protone: $W=M^*$

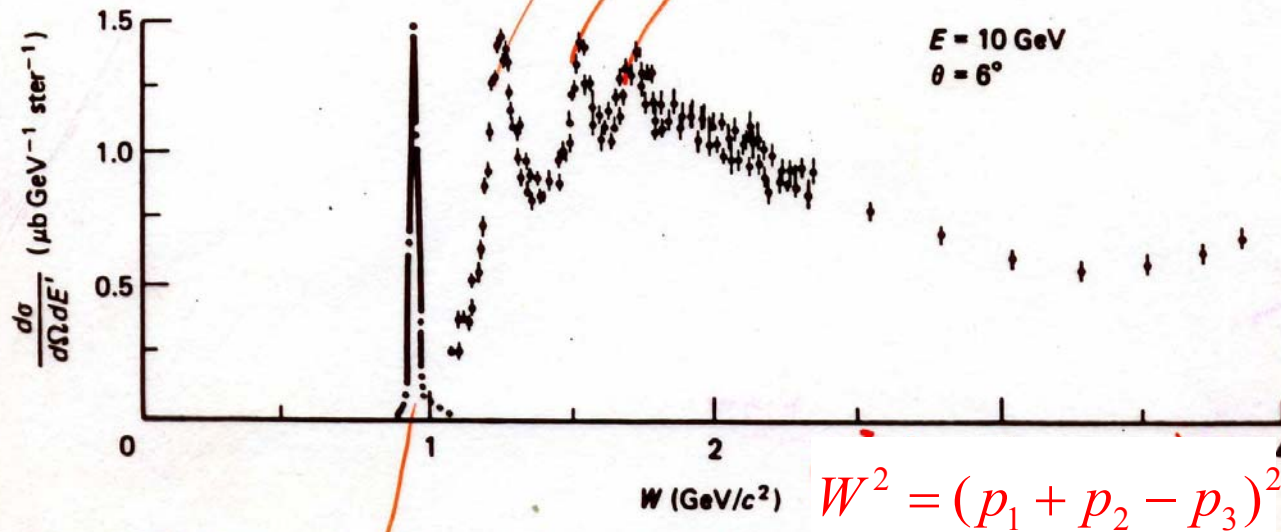


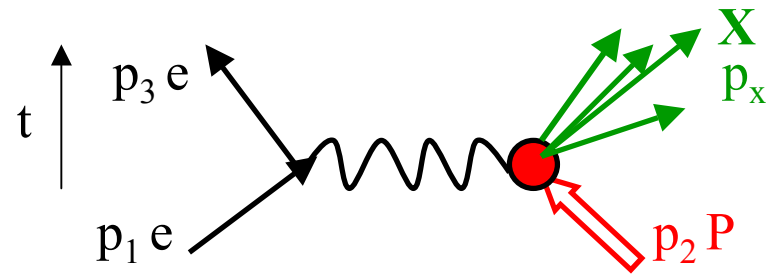
Figure 8.5 Cross section for inclusive inelastic electron-proton scattering, as a function of “missing mass” ($W = \sqrt{p_{\text{tot}}^2}/c$). The elastic peak at $W = M$ has been reduced by factor 8.5, to fit it on the graph. (Source: J. I. Friedman and H. W. Kendall; reproduced, with permission, from the Annual Review of Nuclear and Particle Science, Volume 22, © 1972 by Annual Reviews Inc.; page 210.)

Caso elastico $W=M$

Risonanze del protone: $N(1440)$, $\Gamma=350 \text{ MeV}$, $I(J^P)=\frac{1}{2} (1/2^+) \rightarrow N\pi, N\pi\pi$
 $N(1520)$, $\Gamma=120 \text{ MeV}$, $I(J^P)=\frac{1}{2} (3/2^-) \rightarrow N\pi, N\pi\pi$

...

Scattering inelastico ep (DIS)



$e p \rightarrow e X$ **Misura inclusive:**
si somma su tutti gli stati X,
in pratica si misura solo l'elettrone

N.B. Ora E' è indipendente da θ e da E .

Se p_x è il quadrimpulso del sistema X : $p_x = [W, \vec{P}]$ con $M^* = \sqrt{W^2 - P^2}$ abbiamo:

$$-q^2 = -(p_1 - p_3)^2 = -(p_2 - p_x)^2 = P^2 - (W - M)^2 = P^2 - W^2 - M^2 + 2WM = -M^{*2} - M^2 + 2(E - E')M + 2M^2$$

• Se lo scattering è elastico $M^2 = M^{*2} \implies -q^2 = 2(E - E')M = 2q \cdot p_2 \implies$

- 1 solo scalare indipendente : q^2

- E e E' sono legate attraverso θ :

$$E' = \frac{E}{\left[1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}$$

Se lo scattering è inelastico $M^2 \neq M^{*2} \implies$

- q^2 e $q \cdot p_2$ sono scalari indipendenti

- E e E' sono quantità indipendenti

- la sezione d'urto è doppiamente differenziale ad es in Ω e E' (Griffiths):

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad \text{Dimensioni } W_1, W_2 \text{ GeV}^{-1}$$

W_1, W_2 sono funzioni di struttura che dipendono da 2 scalari indipendenti ad es:

$$(\mathbf{E}', \theta); (q^2, q \cdot p_2) \implies (\text{lab}) = (q^2, M(E - E')) = (q^2, Mv)$$

Oppure da combinazioni adimensionali invarianti di Lorentz:

$$x = \frac{-q^2}{2q \cdot p} \xrightarrow{\text{LAB}} \frac{-q^2}{2M(E - E')}$$

$$y = \frac{q \cdot p_2}{p_1 \cdot p_2} \xrightarrow{\text{LAB}} \frac{E - E'}{E}$$

Variabili di
Bjorken

Posso quindi parametrizzare $W_{1,2}(q^2, x)$.

N.B. La formula di Rosenbluth dello scattering elastico è un caso particolare di quella di scattering anelastico. Infatti scegliendo:

$$W_{1,2}(q^2, x) = \frac{-K_{1,2}(q^2)}{2Mq^2} \delta(x - 1) \quad \text{Se il protone fosse anche puntiforme:} \\ K_1 = -q^2; K_2 = 4M^2 \text{ (Mott)}$$

Osserviamo che se $x=1, -q^2 = 2q \cdot p \implies (\text{LAB}) \implies$

$$\implies 4EE' \sin^2 \theta / 2 = -2M(E' - E) \implies E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \theta / 2}$$

**Condizione
di scattering elastico**

La struttura del protone è nella determinazione (sperimentale) di $k_1(q^2), k_2(q^2), W_1(q^2, v), W_2(q^2, v)$ o o anche $W_1(x, y), W_2(x, y)$

Scaling di Bjorken

Bjorken (fine anni 60): Ad alta energia (s, Q^2)

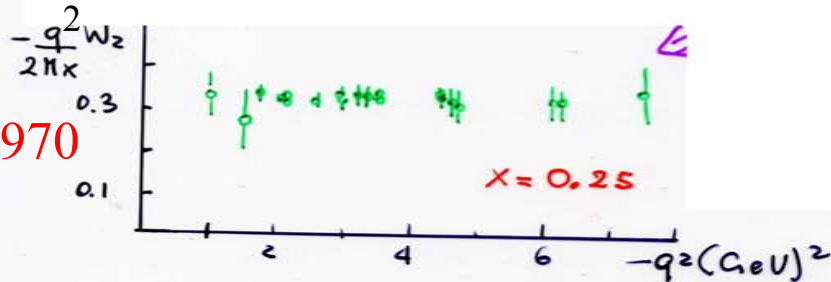
la dipendenza delle funzioni di struttura inelastiche da Q^2 svanisce

$$\text{dati } x = \frac{-q^2}{2q \cdot p} \xrightarrow{\text{LAB}} \frac{Q^2}{2Mv}, v = \frac{q \cdot p}{M} \xrightarrow{\text{LAB}} E - E'$$

$$MW_1(Q^2, x) \rightarrow F_1(x)$$

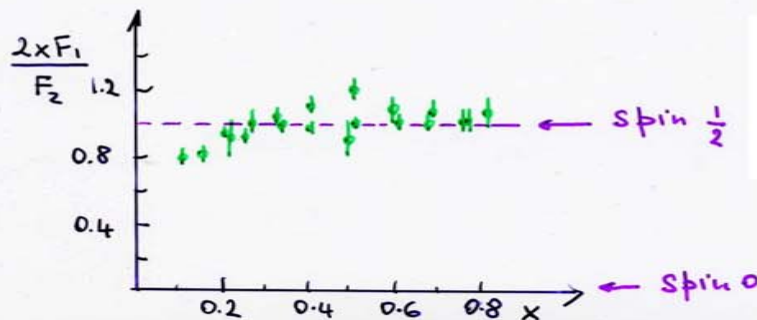
$$vW_2(Q^2, x) \rightarrow F_2(x)$$

SLAC 1970



Scaling: vero a Q^2, v grandi
ma x piccolo (<1)

La legge di scaling è conseguenza della struttura del protone, composto da costituenti puntiformi



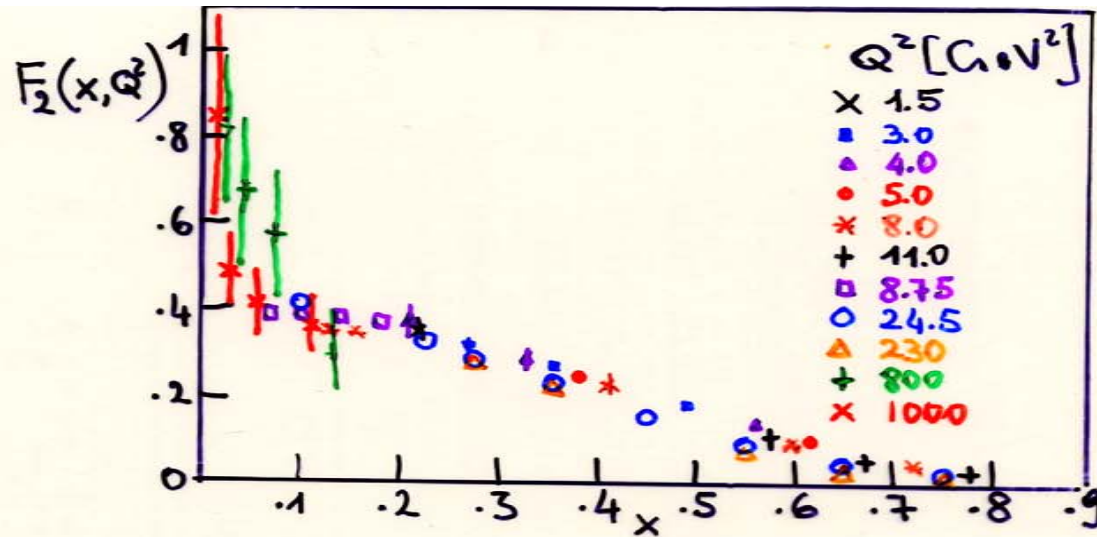
Callan Gross 1969:

$$2xF_1(x) = F_2(x) \implies$$

I costituenti hanno spin 1/2

$$\underline{e^- p \rightarrow e^- X}$$

Esperimenti su F_2 da $\sqrt{s}=10$ GeV (SLAC)
a $\sqrt{s}=300$ GeV (HERA)



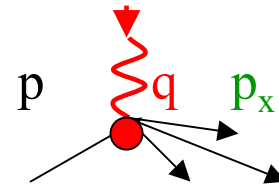
Q^2 studiato su 3 ordini di grandezza: F_2 è una curva universale di x :

Fissato x , $F_2(x)$ è indipendente da Q^2

Nota su x :

$$x = \frac{Q^2}{2q \cdot p} = \frac{Q^2}{(p+q)^2 - p^2 - q^2} = \frac{Q^2}{M_x^2 - M^2 + Q^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{M_x^2 - M^2}{Q^2} + 1} \leq 1, \text{ quindi } 0 \leq x \leq 1; \text{ se } M_x^2 \gg M^2, Q^2 \Rightarrow x \approx 0 \text{ (indipendente da } Q^2)$$



$$(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2q \cdot p = p_x^2$$

I costituenti puntiformi

Giustificiamo l'ipotesi dei costituenti puntiformi a spin $\frac{1}{2}$: invece che sul protone

l'interazione è uno **scattering elastico sul costituente puntiforme "i" di spin $\frac{1}{2}$, di carica frazionaria Q_i e massa m_i** Le funzioni di struttura sono quelle elastiche di Mott:

$$W_1^i = \frac{Q_i^2}{2m_i} \delta(x_i - 1); \quad W_2^i = -\frac{2m_i Q_i^2}{q^2} \delta(x_i - 1) \quad \text{con } x_i = \frac{-q^2}{2q \cdot p_i}$$

Assumiamo $p_i = z_i p$. Se il protone è fermo i costituenti sono fermi. Semplice ipotesi:

$$m_i = z_i M; \quad x_i = \frac{-q^2}{2q \cdot p_i} = \frac{-q^2}{2q \cdot z_i p} = \frac{x}{z_i}$$

Altro ingrediente: **la probabilità** che il quark (costituente i esimo) trasporti la frazione z_i dell'impulso del protone: **$f_i(z_i) = \text{densità di probabilità} = dn/dz_i$**

Le funzioni di struttura del protone $W_{1,2}$ ricevono **il contributo incoerente** di tutti i costituenti i del protone (Σ_i) ciascuno pesato e integrato sulla frazione z_i di impulso trasportato. **Il protone diventa un fascio di costituenti scorrelati.**

$$W_1 = \sum_i \int \frac{Q_i^2 f_i(z_i)}{2M z_i} \delta\left(\frac{x}{z_i} - 1\right) dz_i = \sum_i \int \frac{Q_i^2 f_i(z_i)}{2M} \delta(x - z_i) dz_i = \frac{1}{2M} \sum_i Q_i^2 f_i(x)$$

x diventa la frazione di impulso trasportata dal costituente i esimo

$$W_2 = \sum_i \int \left(\frac{-2z_i M}{q^2} \right) Q_i^2 f_i(z_i) \delta\left(\frac{x}{z_i} - 1\right) dz_i = \sum_i \int \left(\frac{-2z_i^2 M}{q^2} \right) Q_i^2 f_i(z_i) \delta(x - z_i) dz_i = -\frac{2M}{q^2} x^2 \sum_i Q_i^2 f_i(x)$$

Le funzioni di scaling di Bjorken $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono definite da:

$$F_1(x) = MW_1 = \frac{1}{2} \sum_i Q_i^2 f_i(x); \quad F_2(x) = vW_2 = \frac{-q^2}{2Mx} W_2 = x \sum_i Q_i^2 f_i(x);$$

Che realizzano la relazione di Callan-Gross.

Quindi un modello che descrive il protone come composto da costituenti elementari di spin $\frac{1}{2}$ puntiformi (alla Dirac) soddisfa:

a) Lo scaling di Bjorken;

b) La relazione di Callan Gross (ci sono anche interazioni di momento magnetico).

Restano ancora da determinare:

a) La frazione di carica Q_i dei costituenti;

b) Le funzioni di distribuzione di probabilità $f_i(x)$ dei costituenti.

c) Perché nello stato finale non vediamo direttamente i costituenti scatterati ma i prodotti della loro frammentazione: **i jets**.

d) Quanto siano trascurabili le interazioni tra i costituenti all'interno del protone; (esse possono provocare violazioni dello scaling di Bjorken).

Funzioni di distribuzione di probabilità (pdf)

Se $z_i = m_i/M$ (modello ipersemplificato) la funzione di distribuzione di probabilità dei costituenti diventa semplicemente $f_i(z_i) = \delta(m_i/M - z_i)$

Se il protone è costituito da 3 quark: (uud) con cariche elettriche (2/3, 2/3, -1/3)

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_i Q_i^2 f_i(x) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^2 \delta\left(\frac{m_u}{M} - x\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \delta\left(\frac{m_u}{M} - x\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \delta\left(\frac{m_d}{M} - x\right) \right\}$$

$$\text{se } m_u = m_d = ? = \frac{1}{3}M \quad F_1(x) = \frac{1}{2} \delta\left(\frac{m_u}{M} - x\right); F_2(x) = x \delta\left(\frac{m_u}{M} - x\right)$$

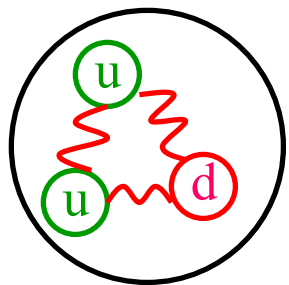
Le funzioni di distribuzioni sarebbero delle delta!!

Il protone non esisterebbe più: sarebbe un fascio di bersagli di massa m_u e dall'interazione dovrebbe emergere il costituente libero!

Il modello è troppo semplificato perchè:

- a) I quark liberi non sono mai stati misurati,
- b) La massa di un quark all'interno del protone (specie se leggero) non è una quantità ben definibile;
- c) Non possiamo trascurare completamente l'energia di legame tra i quark nel protone: in un modello alla Yukawa ci aspetteremmo $\Delta E \sim m_\pi \sim 100 \text{ MeV}$.

Migliore rappresentazione: i quark sono particelle virtuali nel protone in continua interazione tra loro e quindi “la loro massa” m_i assume una distribuzione continua



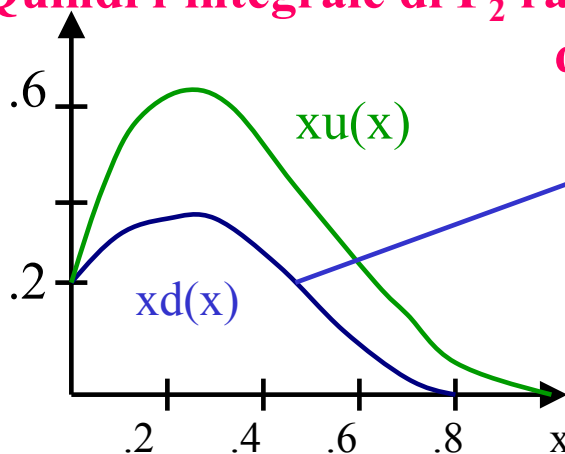
Ci vuole una teoria delle interazioni forti tra i quark, se l'avessimo, applicabile anche a basso Q^2 (<1 GeV), potremmo calcolare le funzioni di distribuzione...

Le funzioni di distribuzione non sono delta, parametrizziamole con funzioni $u(x)$, $d(x)$ da determinare sperimentalmente:

$$F_2(x) = x \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 u(x) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 d(x) \right] \quad \text{e} \quad \int_0^1 F_2(x) dx = \frac{4}{9} \int_0^1 x u(x) dx + \frac{1}{9} \int_0^1 x d(x) dx \quad \xrightarrow{\text{ci sono 2u e 1d, in media l'impulso trasportato}}$$

$$\int x u(x) dx = 2 \int x d(x) dx, \quad \text{quindi} \quad \int F_2(x) dx = \int x d(x) dx$$

Quindi l'integrale di F_2 rappresenta la frazione di impulso (media) trasportata dal quark costituente d del protone



ma

$$\int_0^1 x d(x) dx = 0.18 \quad (\text{dalla misura di } F_2) \quad \text{quindi :}$$

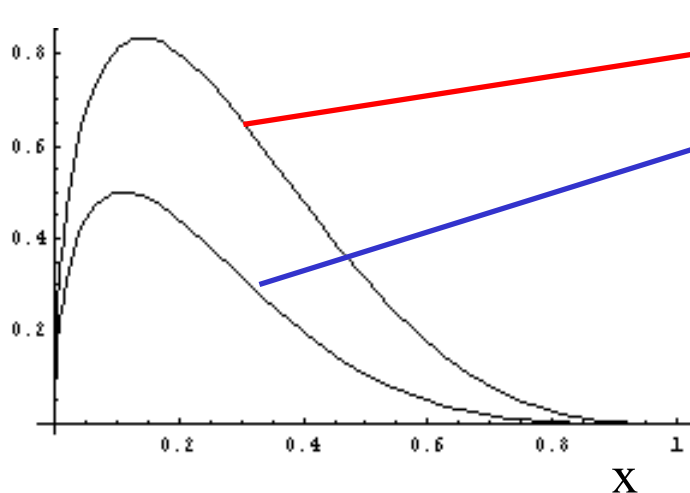
$$\int_0^1 x d(x) dx + \int_0^1 x u(x) dx = 0.18 \times 3 = 0.54 (\pm 0.05)$$

(misure effettuate a $Q^2 \sim 5 \text{ GeV}^2$)

Manca circa la metà dell'impulso del protone!!

Esistono decine di parametrizzazioni delle pdf: prendiamone una ipersemplicata:

Parametrizzazione per il protone:



$$x u(x) = 3.5 \sqrt{x} (1-x)^3$$

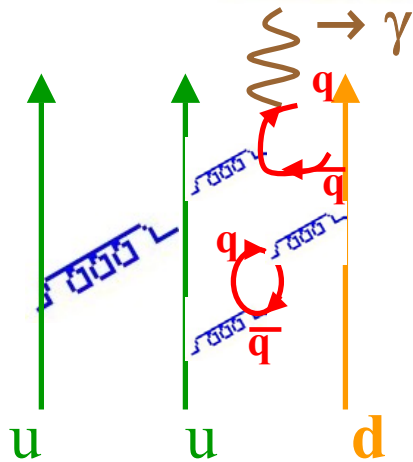
$$x d(x) = 2.4 \sqrt{x} (1-x)^4$$

Nota che $d(x)$ non e' eguale a $1/2u(x)$ a qualunque x , in particolare se $x \rightarrow 1$ domina la $u(x)$ (che da l'isospin del protone) indicando che la coppia ud rimanente si trova in una configurazione di isospin=0

La struttura del protone si complica...

Il protone è composto anche da particelle “scariche” (insensibili alla QED) ma che trasportano circa il 50% dell'impulso (massa) del protone:

I gluoni:  (equivalenti delle particelle di Yukawa)



Il modello si complica: nel protone ci sono:

- 1) I quark che danno i numeri quantici (valenza)
- 2) I gluoni mediatori della forza forte tra i quark;
- 3) Coppie $q\bar{q}$ che possono anche essere diversi da u e d (quark di mare); fenomeno simile alla produzione di coppie e^+e^- da parte dei fotoni.

Il DIS è sensibile solo a 1) e 3). I quark noti sono: $\begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ b \end{bmatrix}$ $Q=2/3$

N.B. Le interazioni elettromagnetiche non distinguono i doppietti

$Q=-1/3$

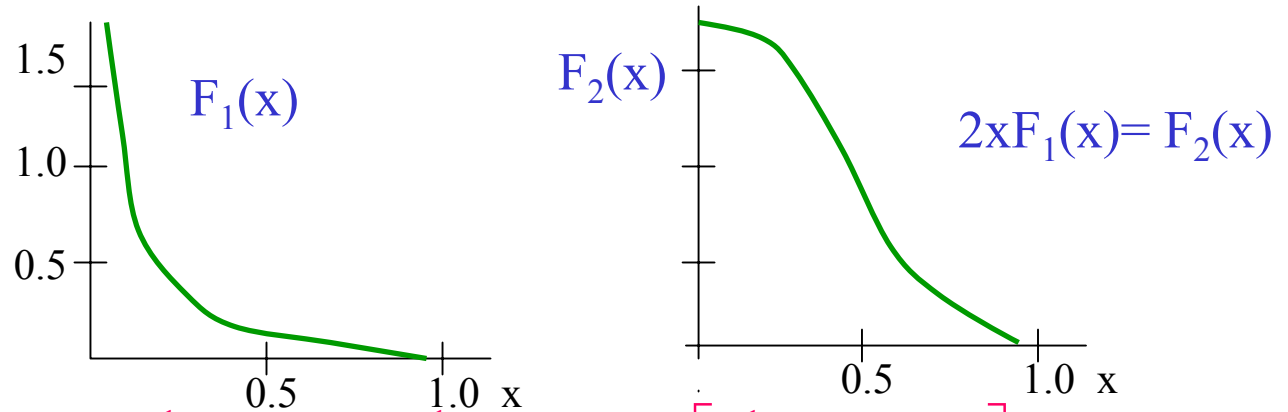
Trascuriamo i quark più massivi: c, b, t (più il quark è massivo più è sensato attribuirgli una massa definita ma e' piu' improbabile che possa materializzarsi dai gluoni).

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^2 [u(x) + \bar{u}(x)] + \left(\frac{1}{3} \right)^2 [d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] \right\}$$

Il nostro problema è la determinazione di $u(x), \bar{u}(x), d(x), \bar{d}(x), s(x), \bar{s}(x)$ possiamo anche sfruttare il DIS di neutroni (da interazioni ed) e lo scattering di neutrini. Inoltre è ragionevole assumere che: $\bar{u}(x) \approx \bar{d}(x) \approx s(x) \approx \bar{s}(x) \equiv s(x)$ e $u(x) = u_v(x) + s(x), d(x) = d_v(x) + s(x)$

$$\Rightarrow F_1(x) = \frac{1}{18} \{4u(x) + d(x) + 12s(x)\} \text{ con tre funzioni incognite}$$

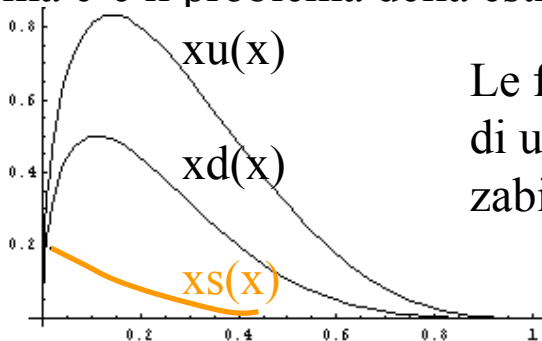
Risultati sperimentali:



Regole di somma:

$$\int_0^1 u(x) dx = 2, \int_0^1 d(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 s(x) dx = \frac{3}{4} \left[2 \int_0^1 F_1(x) dx - 1 \right]$$

Quindi in principio, si può determinare il numero medio di quark di mare dalla misura di $F_1(x)$, ma c'è il problema della estrapolazione a zero (l'integrale può andare da 0.5 a ∞ ...)



Le funzioni di distribuzioni dei quark predicibili se disponessimo di una teoria delle interazioni forti anche a basso Q^2 . Sono parametrizzabili dai dati sperimentali: as es.

$$xf(x) = Ax^\alpha (1-x)^\beta$$

Ci aspettiamo che a piccoli x dominino i quark di mare mentre a grandi x quelli di valenza. Se facciamo scattering sui neutroni, la simmetria di isospin predice:

$$u_v^p(x) = d_v^n, d_v^p(x) = u_v^n$$

Il rapporto: $F_2^n(x)/F_2^p(x)$ dipende dal rapporto delle cariche elettriche dei quark coinvolti
In particolare:

$$\frac{F_2^n(x \rightarrow 0)}{F_2^p(x \rightarrow 0)} = 1, \text{ quark di mare}$$

$$\frac{F_2^n(x \rightarrow 1)}{F_2^p(x \rightarrow 1)} = \frac{1}{4}, \text{ quark } d \text{ (n), } u \text{ (p)}$$

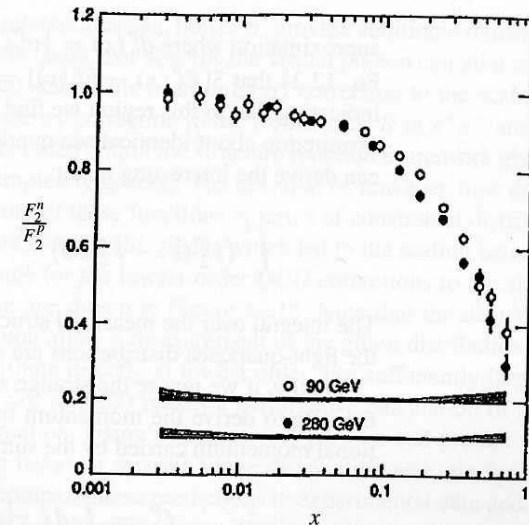


FIGURE 12.13 Ratio of F_2^n/F_2^p versus x . Data were taken with muon beams of 90 GeV and 280 GeV incident on proton or deuterium targets. Bands in the figure indicate the systematic error versus x for each beam energy. [From P. Amaudruz et al., *Nucl. Phys.* B371, 3 (1992).]

Regole di somma per p e n

$$\int_0^1 F_2(x) \frac{dx}{x} = \sum_{i=1}^m Q_i^2 \int_0^1 f_i(x) dx$$

Per il protone e il neutrone, trascurando il mare:

$$= \frac{4}{9} \int_0^1 f_u(x) dx + \frac{4}{9} \int_0^1 f_u(x) dx + \frac{1}{9} \int_0^1 f_d(x) dx = 1 \quad \text{protone}$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^1 f_d(x) dx + \frac{1}{9} \int_0^1 f_d(x) dx + \frac{4}{9} \int_0^1 f_u(x) dx = \frac{2}{3} \quad \text{neutrone}$$

Normalizzando f_u e f_d a 1

Ipotesi: il mare contribuisce a piccoli x in modo eguale per p e n, definiamo la differenza

$$\int_0^1 (F_2^p(x) - F_2^n(x)) \frac{dx}{x} = \frac{8}{9} \int_0^1 f_u dx + \frac{1}{9} \int_0^1 f_d dx - \frac{4}{9} \int_0^1 f_u dx - \frac{2}{9} \int_0^1 f_d dx = \frac{1}{3}$$

Sperimentalmente 0.24 ± 0.03
differenza del 25%

Se rinunciamo all'ipotesi di mare simmetrico per p e n e indicando con u e d le distribuzioni sommate di coppie di quark e con s quella del mare:

$$\frac{F_2^\alpha}{x} = \frac{4}{9} [u^\alpha(x) + \bar{u}^\alpha(x)] + \frac{1}{9} [d^\alpha(x) + \bar{d}^\alpha(x)] + \frac{1}{9} [s^\alpha(x) + \bar{s}^\alpha(x)], \alpha = p, n$$

Simmetria isotopica: $u^p = d^n \equiv u, d^p = u^n \equiv d, s^p = s^n \equiv s; \bar{u}^p = \bar{d}^n \equiv \bar{u}, \bar{d}^p = \bar{u}^n \equiv \bar{d}$

Imponendo la carica elettrica 1 per p e 0 per n e $s^{p,n}=0$: $\int \left[\frac{2}{3}(u - \bar{u}) - \frac{1}{3}(d - \bar{d}) \right] dx = 1; \int \left[\frac{2}{3}(d - \bar{d}) - \frac{1}{3}(u - \bar{u}) \right] dx = 0;$
 $\int [s - \bar{s}] = 0$

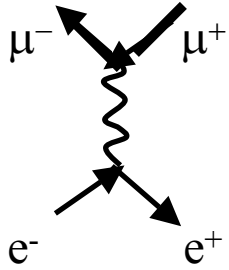
da cui $\int dx [u(x) - \bar{u}(x)] = 2; \int dx [d(x) - \bar{d}(x)] = 1$

$$\int_0^1 (F_2^p(x) - F_2^n(x)) \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_0^1 [\bar{u}(x) - \bar{d}(x) + \dots]$$

Regola di somma di Gottfried: la distribuzione di quark di mare \bar{u} e \bar{d} non sono le stesse nel protone ($\bar{d} > \bar{u}$): il principio di esclusione favorisce le coppie $d\bar{d}$

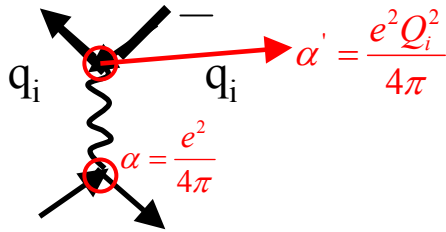
Altri processi in cui emergono i costituenti (q)

Abbiamo visto:



$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = 4/3 \pi\alpha^2/s \text{ (trascurando tutte le masse)}$$

Ma i fermioni finali possono essere coppie di quark: $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q$



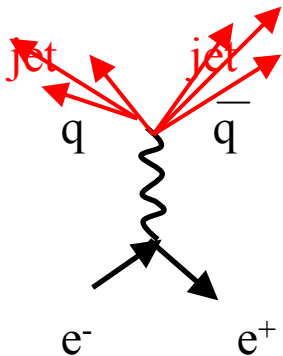
La sezione d'urto sarà la stessa della coppia di muoni con la correzione della carica frazionaria Q_i^2 :

$$\sigma_{q_i\bar{q}_i} = \sigma_{\mu\mu} Q_i^2$$

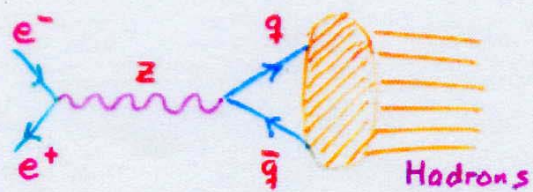
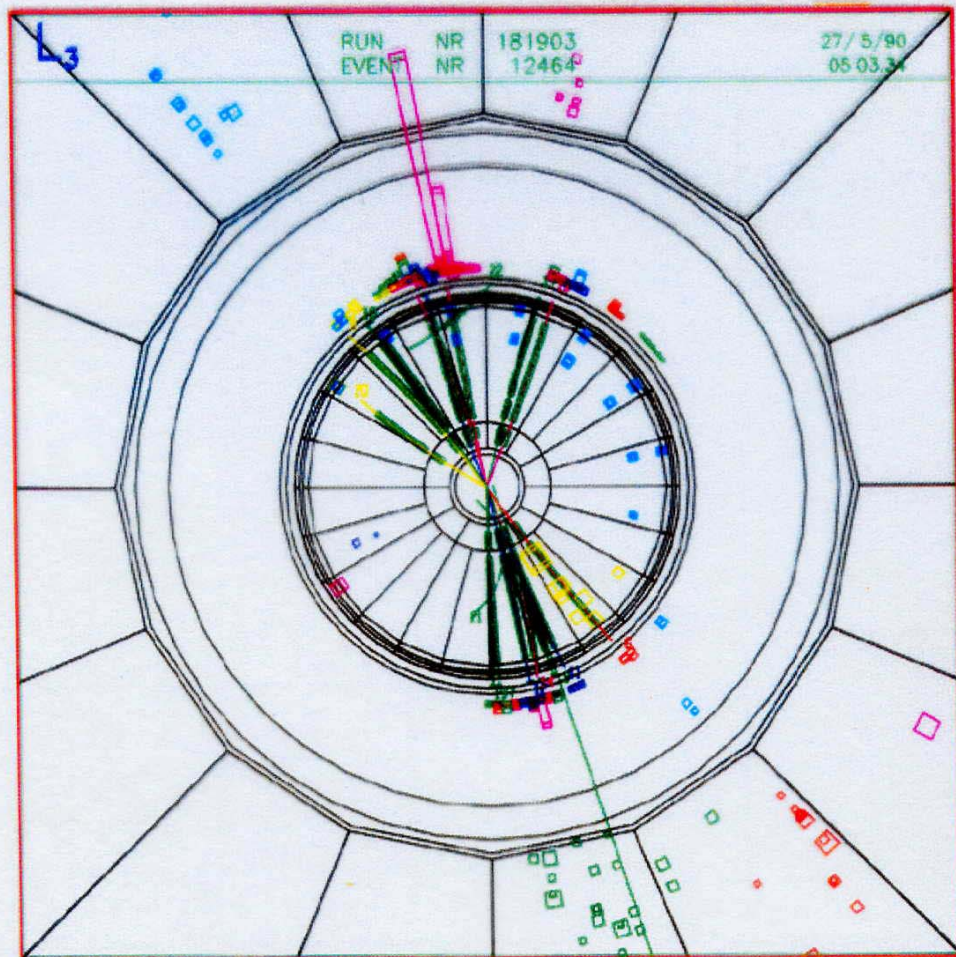
Come nel caso del DIS i quark non sono misurati direttamente (confinamento) ma si misurano i prodotti di frammentazione dei quark: i jet.

Sperimentalmente vanno identificati i jet e associamo l'annichilazione in coppie di jet come quella in coppie di quark/antiquark:

$$\sigma_{j_i j_i} = \sigma_{q_i \bar{q}_i} = \sigma_{\mu\mu} Q_i^2 \text{ e se i tipi di quark sono } N :$$



$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow jj)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_{i=1}^N Q_i^2$$



Ovviamente l'apertura di un canale di decadimento in una specifica coppia di quark di massa m_i **è possibile solo se $\sqrt{s} = 2\varepsilon > 2 m_i$** (così pure in una coppia di nuovi leptoni)

Così la misura di $R(2\varepsilon)$ ci dice:

- quanti sono i quark;
- quale è la loro carica elettrica;
- quanto vale la loro massa;
- ci permette di studiare gli stati legati $q \bar{q}$

A bassa energia ($s \leq (3 \text{ GeV})^2$) ci aspettiamo contributi da u, d, s ($Q_i=2/3;-1/3;-1/3$).

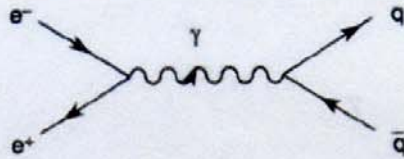
$$\text{Quindi } R=(2/3)^2+(-1/3)^2+(-1/3)^2= 2/3$$

A più alta energia si aprono i canali dei quark:

- c, $Q=2/3$, $m \sim 1.5 \text{ GeV}$;
- b, $Q=-1/3$, $m \sim 5 \text{ GeV}$;
- t, $Q=2/3$, $m \sim 175 \text{ GeV}$.

La distribuzione angolare dei jet prodotti è la stessa che per i muoni:

$$\propto (1+\cos^2\theta_{\text{jet}}) \text{ (tipica per un mediatore di spin 1)}$$

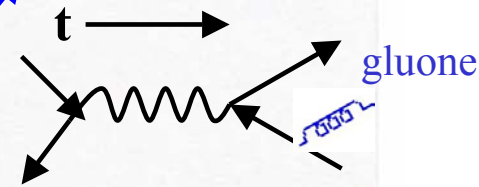
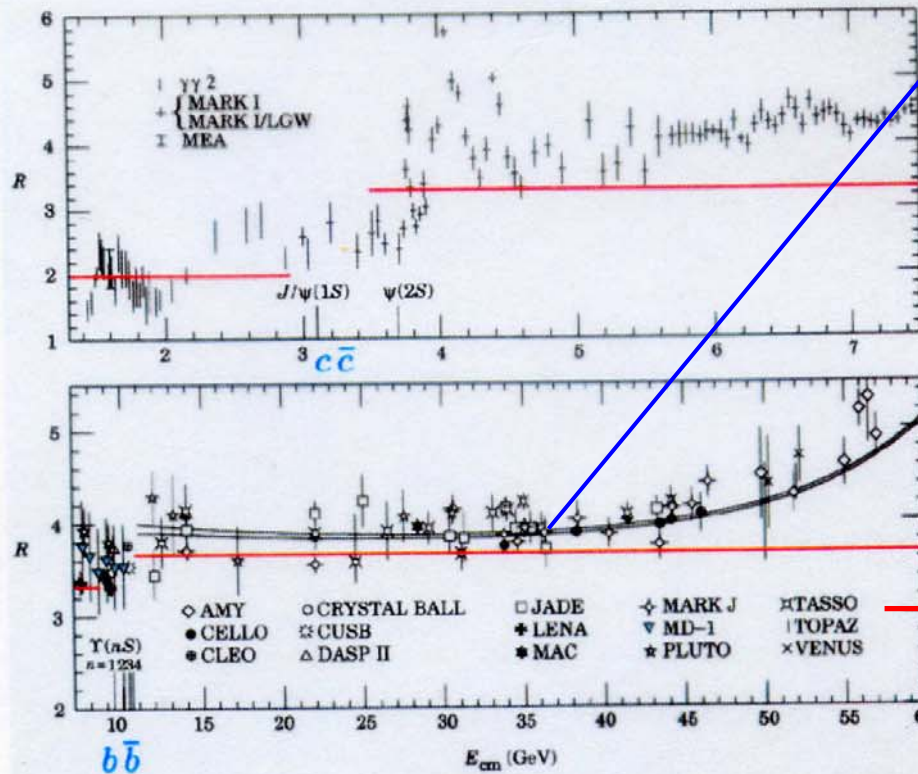


$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \approx \frac{\sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \approx N_C \sum_q Q_q^2$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3} N_C & (u, d, s) \\ \frac{10}{9} N_C & (u, d, s, c) \\ \frac{11}{9} N_C & (u, d, s, c, b) \end{cases}$$

Accordo se $N_C=3$;
deviazioni dovute
a interazioni forti:

N.B. Nel DIS
il fotone è
insensibile al
colore:
media sul colore
dei quark iniziali



e all'avvicinarsi della
massa dello Z_0

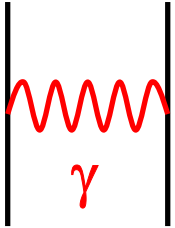
Z_0

N.B. Senza il colore
 $R=11/9$

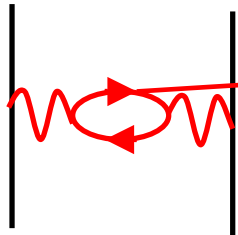
Processi a ordine superiore

Costante di accoppiamento in QED

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$



L'ampiezza A del processo è proporzionale a α/Q^2 (I ordine)



Polarizzazione del vuoto: integrale sul loop divergente: si inserisce un "cutoff" Λ (arbitrario):

$$A \propto \alpha(Q^2)/Q^2, \alpha(Q^2) = \alpha \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} \right]$$

Ma il cutoff scompare dalle relazioni tra quantità misurabili (**rinormalizzabilità**)

$$\alpha(Q_2^2) = \alpha(Q_1^2) \left[1 - \frac{\alpha(Q_2^2)}{3\pi} \ln \frac{Q_1^2}{Q_2^2} \right]$$

\Rightarrow **Running coupling constant**

\Rightarrow **(scegliamo $Q_2^2 = m_e^2$ come valore**

\Rightarrow di normalizzazione)

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(m_e^2)}{1 - \frac{\alpha(m_e^2)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{m_e^2}}$$

α aumenta con Q^2 (screening), ma variazione lenta, immisurabile a basso Q^2 (Rutherford)

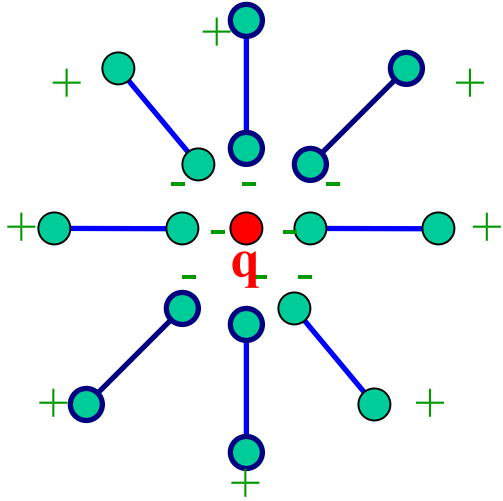
$$[\alpha(m_e^2)]^{-1} = 137.03604 \pm 0.00011$$

A $Q^2 = (90 \text{ GeV})^2$

$$\alpha \approx \frac{1}{134} \text{ (a tutti gli ordini } \alpha \approx \frac{1}{128})$$

Spiegazione qualitativa:

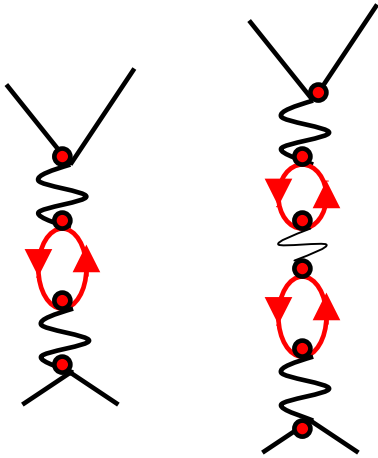
Il vuoto si comporta come un dielettrico: crea cariche di polarizzazione:



Le cariche di polarizzazione creano un effetto di schermo: $q_{\text{eff}} = q/\epsilon$

Quella che chiamiamo “carica libera” dell’elettrone ($\alpha=1/137$) è in effetti la carica totalmente schermata cioè a distanza infinita (Q^2 piccoli).

Se ci avviciniamo all’elettrone (Q^2 grandi) l’effetto di schermo diminuisce (tendo a vedere la carica “nuda”). In termini di diagrammi di Feynman:



L’elettrone virtuale è attratto da +q, mentre il positrone è respinto \Rightarrow

Le cariche vedono un campo attenuato.

A quali distanze l’effetto si comincia a sentire:

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c} = 3.86 \times 10^{-11} \text{ cm (lunghezza d'onda Compton)}$$

Bibliografia

- **D.Perkins**, “Introduction to high energy physics”, quarta edizione Cambridge University Press, 1999;
- **D.Griffith**,”Introduction to elementary particles” Harper & Row, Publisher, New York, 1987;
- **I.J.Aitchison, A.J.G.Hey**, “Gauge theories in particle physics”, Institute of physics 2003.
- **A.Seiden**,”Particle Physics a comprehensive introduction” Addison Wesley 2004.