Laurea in Fisica
a.a. 2005-2006
Metodi Matematici I A
Titolare: Prof. Luciano Bracci

Programma.

Spazi vettoriali. Prodotto scalare, norma. Loro continuita'. Equivalenza di tutte le norme in dimensione finita. Lo spazio C0. Sua completezza rispetto alla norma del sup. Teorema di Weierstrass e densita' dei polinomi in C0. C0 non e' completo con la norma L2. Completamento di uno spazio normato. Il completamento di C0 secondo la norma L2 e' L2.

Principali proprieta' di L2. Insiemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel,. Proprieta' di minimo dei coefficienti di Fourier. Insiemi completi e relazione di Parseval. Criterio di completezza. Completezza dei polinomi di Legendre in L2(-1,1). Completezza dei seni e dei coseni in L2(-π,π). Relazioni fra i vari tipi di convergenza. Relazione fra i coefficienti di Fourier e le proprieta' della funzione. Integrabilita' termine a termine di una serie di Fourier convegente in L2.

Soluzione del problema del potenziale in un quadrato con la separazione delle variabili. u(x,y)-->u(x,0) in L2. Soluzione del problema di Dirichlet per il cerchio con la separazione delle variabili. Formula di Poisson. Soluzione dell'equazione di Poisson per il cerchio. La funzione di Green. Soluzione dell'equazione della corda vibrante, omogenea e non omogenea.

Spazi di Hilbert. Gli spazi l2 e L2, loro isomorfismo. Tutti gli spazi separabili sono isomorfi. Sottospazi lineari chiusi e non chiusi. Se H' e' chiuso esiste il proiettore su di esso. Se H'≠H esiste un vettore non nullo ortogonale a H'. Condizione perche' una varieta' lineare sia densa.

Operatori lineari. Norma. Limitatezza e continuita'. La derivata e la moltiplicazione per x (intervallo infinito) non sono limitati. Funzionali. Il teorema di Riesz. Definizione di T+ per T limitato. Principali proprieta'. Se P e' un proiettore e' P=P2=P+ e viceversa. Condizioni perche' il prodotto, la somma e la differenza di proiettori sia un proiettore. Estensione per continuita' di un operatore lineare definito su un denso. Rappresentazione matriciale di un operatore limitato. Operatori unitari. Essi trasformano basi ortonormali in basi ortonormali. Operatori isometrici.

Autovalori e autovettori. Il caso degli operatori unitari e hermitiani. Sottospazi invarianti. Se H' e' invariante sotto T e T+, il complemento ortogonale e' invariante sotto T. In dimensione finita gli operatori normali sono diagonalizzabili. Se P(T)=0 e' l'eq. algebrica di grado minimo soddisfatta da T, gli autovalori di T sono tutte e sole le radici di P(x). Operatori compatti. Operatori compatti autoaggiunti, teorema di Hilbert-Schmidt.

L'equazione del calore su una retta affrontata con la separazione delle variabili. Sviluppo di una funzione sulla retta come sovrapposizione di exp(iwx). Derivazione euristica delle formule per la trasformata di Fourier. L'insieme S e' denso in L2 . Validita' in S della formula di inversione e della relazione di Parseval. La trasformata di Fourier trasforma S in se' in modo biunivoco. Calcolo della trasformata di exp(-x2). Per f in L2 il funzionale Ff(f) = ∫fF(f) e' limitato su S, puo' essere esteso a tutto L2 e individua una funzione Ff di norma uguale a f. Ff e' il limite in L2 di ∫-nn f exp(iwx) dx. La trasformata inversa. F e' un operatore unitario. La trasformata di Fourier in L1. Sue proprieta' principali.

Lo spazio K = HxH come spazio di Hilbert. Il grafico di un operatore. Definizione di operatore chiuso. Il caso di operatori limitati. Esempio di operatori non chiusi. L'operatore aggiunto. Esso e' sempre chiuso. Ricerca dell'aggiunto di alcuni operatori. L'operatore derivata e' chiuso. La chiusura di un operatore. Condizione perche' esista. Se T ha dominio denso e ha chiusura, allora T+ ha dominio denso e la chiusura di T e' T++. L'operatore P = -id/dx. Se in DP le f sono nulle agli estremi, P e' simmetrico ma non autoaggiunto, se in DP f(π)=exp(iq)f(0), P e' autoaggiunto.